Arithmétique des nombres entiers naturels

Niveau : Tronc commun scientifique

Activités :

1) Rappeler les critères de divisibilité d'un entier naturel par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9 et par 10.

2) Effectuer la division euclidienne de 1224 par 12

3) Compléter par un entier convenable : $24 \times \ldots\ldots = 1224$

4) $x \ et \ y$ étant des entiers naturels, donner toutes les valeurs possibles de $x \ et \ y$ sachant que : $xy = 12$

5) Compléter :

$$7 \times \ldots = 28 \ ; \ 7 \times \ldots = 42 \ ; \ 7 \times \ldots = 70 \ ; 7 \times \ldots = 84$$

6) Quels sont les restes dans division par 2 des nombres 1923 ; 2024 ; $4861 \ et \ 10000$. (Sans effectuer les divisions)

I. L'ensemble des entiers naturels

Notations et définitions

- On notera l'ensemble de tous les nombres entiers naturels par ℕ et on l'écrira en extension (Liste explicite des éléments) comme suit :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\} \text{ et } \mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$$

- L'ensemble ℕ est infini.
- Si a est un élément d'un ensemble A, on note : $a \in A$ et on lit : a appartient à A
- Sinon on écrit $a \notin A$ et on lit : a n'appartient pas à A
- Si A et B sont des ensembles et si tous élément de A appartient à B, on dit que A est un sous ensemble de B ou que A est inclus dans B et on note : $A \subset B$; sinon on note : $A \not\subset B$

Exercices d'application :

Compléter par : $\in$, $\notin$, $\subset$ $\boldsymbol{et}$ $\not\subset$

a) $\sqrt{2^6}$ …… $\mathbb{N}$
b) π …… $\mathbb{N}$
c) $\frac{-4^5}{-2^3}$ …… $\mathbb{N}$
d) $\left\{5; 6; 7; 8; \frac{1}{9}\right\}$ ….. $\mathbb{N}$
e) $\{2^0; 2; 2^2\}$ …… $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

II. Multiples et diviseurs d'un entier naturel

1.Définitions :

Soit 2 entiers naturels $a\ et\ b$.

Si le reste de la division euclidienne de $a\ par\ b$ est égal à 0, on dit que :

- a est un multiple de b
- b est un diviseur de a
- a est divisible par b

Et on a : $a = bq$ où q est le quotient de la division euclidienne de $a\ par\ b$

Remarques :

- Tout nombre entier est un multiple de 1 et de lui-même
- L'entier 0 est un multiple de tout nombre entier naturel.
- Tout nombre entier n non nul admet une infinité de multiples :
  $0\ ;\ n\ ;\ 2n\ ;\ 3n\ ; 4n\ ;\ 5n\ \ldots$

2. Propriétés

Soient $a\ , b\ et\ c$ des entiers naturels.

- Si $b\ et\ c$ sont des multiples de a alors $b + c$ et $b - c$ sont des multiples de a
- Si b est un multiple de a alors bc est un multiple de a
- Si b est un multiple de a et c est un multiple de b alors c est un multiple de a.

- Si b et c sont des diviseurs de a alors $b+c$ et $b-c$ sont des diviseurs de a
- Si a est un multiple de b alors a est un diviseur de bc

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) D_6 l'ensemble de tous les entiers naturels diviseurs de 6
2) D_{36} l'ensemble de tous les entiers naturels diviseurs de 36
3) M_7 l'ensemble de tous les entiers naturels multiples de 7 inférieurs à 61
4) M_4 l'ensemble de tous les entiers naturels multiples de 4 compris entre 21 et 55

Exercice 2 :

Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que :

1) $(1+a)^3 - 1$ est un multiple de a
2) $1 + a^2$ est un diviseur de $(a+1)^2 + (a-1)^2$

III. Parité d'un entier naturel

1.Définitions :

Soit a un entier naturel.

- Si a est un multiple de 2 , on dit que a est pair et il existe un entier k tel que $n = 2k$
- Si a n'est pas pair, il est impair et il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$

2. Propriétés

Soient a et b des entiers naturels tels que $a > b$

- Si a et b ont même parité alors $a + b$ et $a - b$ sont pairs
- Si a est pair ou b est pair alors ab est pair.
- Si a et b sont impairs alors ab est impair.

Exercices d'application :

Soit n un entier naturel.

1) Déterminer la parité des entiers : $2n + 16$; $6n^3 + 5$; $2n^2 + 4n + 3$

2) Montrer que $n^2 + n$ est pair

3) En déduire la parité des entiers :$n^2 + 3n + 4$; $n^2 + n + 5$; $n^3 - n$

IV. Décomposition d'un entier naturel en produit de nombres premiers

Activités :

1) Donner tous les diviseurs des entiers : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 11

2) Ecrire le nombre 60 sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$

1.Définition :

Un entier naturel n est premier si et seulement s'il a exactement 2 diviseurs positifs.

Remarque :

Nombre premiers inférieurs à 100 :(25 nombres)

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,$$

$$47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, \text{et } 97$$

2. Test de primalité : (Admis)

Soit $n \in \mathbb{N}/n \geq 2$. On a :

(n est premier) si et seulement si (n n'est divisible par aucun nombre premier dont le carré est inferieur a n)

Exercices d'application :

Déterminer parmi les nombres suivants ceux qui sont premiers :

$$91 \; ; \; 97 \; ; \; 101 \; ; \; 111 \; ; \; 217 \; ; \; 313 \; ; \; 1003$$

3. Théorème fondamentale de l'Arithmétique :(Admis)

Tout entier naturel $n \geq 2$ se décompose en un produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près sous la forme :

$$n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\dots{p_k}^{\alpha_k}$$

Avec $p_1; p_2; \dots; p_k$ des nombres premiers et $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_k$ des entiers naturels.

Exercices d'application :

Décomposer les entiers suivants en un produit de facteurs premiers :

$$24\ ;\ 72\ ;\ 100\ ;\ 847\ ;\ 21294$$

V. PGCD et PPCM :

Activité :

Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) D_{24} et D_{42} les ensembles de tous les entiers naturels diviseurs respectivement de 24 et 42 en déduire $D_{24} \cap D_{42}$

   Quel est le plus grand d élément de $D_{24} \cap D_{42}$

2) M_{24} et M_{42} les ensembles de tous les entiers naturels non nuls multiples respectivement de $24\ et\ 42$ et inférieurs à 200 en déduire $M_{24} \cap M_{42}$

   Quel est le plus petit élément m de $M_{24} \cap M_{42}$

3) Décomposer en un produit de facteurs premiers les nombres $24\ ;\ 42\ ;\ d\ ;\ m$.

Définitions :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$

-Le plus grand diviseur commun de $a\ et\ b$ est le plus grand commun diviseur de *a et b* noté $PGCD(a,b)$ *ou* $a \wedge b$ *ou* $\Delta(a,b)$

- Le plus petit multiple commun de *a et b* est le plus petit commun multiple strictement positif de $a\ et\ b$ noté $PPCM(a,b)$ *ou* $a \vee b$*ou* $M(a,b)$

Exemple corrigé :

Cherchons le $PPCM\ et\ le\ PGCD$ des nombres $360\ \ et\ 525$

Décomposons ces nombres en produit de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 525 & 5 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On obtient :

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $525 = 3 \times 5^2 \times 7$

- Le PGCD de $a\ et\ b$ est le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions affectées de leur plus petit exposant.
- Le PPCM de $a\ et\ b$ est égal au produit de tous les facteurs premiers des deux décompositions affectées de leur plus grand exposant.

D'où : $PGCD(360; 525) = 3 \times 5 = 15$

et $PPCM(360; 525) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 12600$

On vérifie par calcul ou par les décompositions précédentes que :

$$15 \times 12600 = 360 \times 525$$

c.à.d. que : $PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = ab$

Exercice d'application :

On pose : $a = 4410\ et\ b = 3822$

Trouver $PGCD(a, b)\ et\ PPCM(a, b)$ et vérifier en utilisant les décompositions en facteurs premiers de $a\ et\ de\ b$ que $\frac{15b}{a} \in \mathbb{N}$