ELEMENTS DE LOGIQUE

Niveau : 1ère Sciences mathématiques

Activités

Que pouvez-vous dire des énoncés suivants :

- La fonction $x \longmapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}$
- Tout entier naturel est soit pair, soit impair.
- Il existe un unique nombre réel x vérifiant $x = 2\sqrt{x-1}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $2n+1$ est un carré parfait alors $(n+1)^2$ est somme de 2 carrés parfaits.
- « $x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{x-1}$ »

I- Principe de non-contradiction :

a. Définition et principe :

Une proposition mathématique P est une phrase formelle qui est

- soit vraie : on lui attribue la valeur logique 1 ou V .
- soit fausse : on lui attribue la valeur logique 0 ou F

Une proposition ne peut pas être à la fois vraie et fausse.

b. Table de vérité d'une proposition :

Soit P une proposition.

P
1
0

Ou encore

P
V
F

Exercice d'application :

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1) Entre 2 nombres réels distincts, il existe toujours un rationnel.
2) Un au moins des 2 nombres « π ; $\sqrt{2}$ » est rationnel :
3) L'équation $x - \sqrt{x} = 1$ admet deux solutions réelles.
4) Tout nombre réel est encadré par deux entiers relatifs consécutifs.

II. Quantificateurs

Activités :

Soient 2 réels $x\ et\ y$. On considère l'égalité (E) : $|x + y| = |x| + |y|$

1) Prouver que (E) est vérifiée si $x\ et\ y$ ont même signe.

2) L'égalité (E) est-elle vérifiée si $x\ et\ y$ ont des signes contraires ? Justifier votre réponse.

1.Fonction propositionnelle

Énoncé mathématique qui comprend une ou plusieurs variables et qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables et faux dans les autres cas.

Exemples :

1) $x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$
2) $x \in \mathbb{R} : x + 3 < 5$
3) $n^3 + 3n + 1$ est un entier impair. n étant un entier naturel.

2.Définitions et notations :

Les quantificateurs sont les signes qui expriment dans le langage mathématique la quantification, c.à.d. la quantité d'objets (aucun, tous, certains) pour lesquels une proposition est vraie.

Quantificateur existentiel : $\exists$

$\exists x \in E\ /P(x)$: Se lit il existe au moins un x dans E tel que $P(x)$ soit vérifiée

S'il n'y a qu'un seul x dans E qui vérifie (P), on écrit :

$\exists!\, x \in E\ /\ P(x)$ et on lit il existe un unique $x\ dans\ E\ tel\ que\ P(x)$.

S'il n'y a qu'un seul x dans E qui vérifie (P), on écrit :

$\exists!\, x \in E\ /\ P(x)$ et on lit il existe un unique $x\ dans\ E\ tel\ que\ P(x)$.

Quantificateur universel : $\forall$

$\forall x \in E, P(x)$: Se lit pour tout $x\ de\ E\ , on\ a\ P(x)$

Cette phrase formelle signifie qu'il y a au moins un x dans E qui vérifie la propriété (P) (Il peut y avoir plusieurs).

2. Propriétés :

-L'ordre d'écriture des 2 quantificateurs $\forall\ et\ \exists$ est fondamental pour le sens d'une phrase formelle :

$$(\forall x\ \in\ E), (\exists y\ \in\ F)/\ P(x,y) \quad ..... (\exists y\ \in\ F)/\ (\forall x \in\ E), P(x,y)$$

On peut permuter des quantificateurs de même nature.

Mais : On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

-Négation d'une proposition quantifiée :

$non(\forall x\ \in\ E), (\exists y\ \in\ F)/\ P(x,y) \iff (\exists x\ \in\ E), (\forall y\ \in\ F)/\ \text{non}P(x,y)$

Exercices d'application :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

a. f est constante

b. f n'est pas constante

c. f est impaire

d. f admet un maximum absolu

3. Le raisonnement par contre-exemple :

Pour montrer qu'une proposition du type "$\forall x \in E, P(x)$ " est fausse, il suffit de montrer que sa négation "$\exists x \in E, non\ P(x)$ " est vraie. Il suffit donc de trouver un élément x de E qui vérifie $(non\ P(x))$.

<u>Exercice d'application :</u>

1) Démontrer que la proposition suivante est fausse :

$$« \forall x \in \mathbb{R}^*: x + \frac{1}{x} \geq 2 »$$

2) Démontrer que la fonction numérique $f: x \longmapsto x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire.

<u>III- Connecteurs logiques</u>

<u>1.Equivalence et loi logique</u>

<u>Définition :</u>

- Deux propositions P et Q sont dites équivalentes si elles ont la même valeur logique :

Elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

On note par $P \Leftrightarrow Q$ ou par $Q \Leftrightarrow P$.

La proposition $P \Leftrightarrow Q$ (ou $Q \Leftrightarrow P$) est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

On lit :

P si et seulement si Q

En abrégé : *P ssi Q*

Ou encore *P est équivalente à Q*

- *Une **loi logique** est une proposition composée qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples qui la composent.*

<u>Table de vérité :</u>

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exercice d'application :

Rappeler des théorèmes déjà étudiés et comprenant une équivalence logique et des quantificateurs.

Définition :

2 Négation

La négation d'une proposition P c'est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie. On note $nonP$ ou $\overline{P}$ ou $\neg P$

Propriété :

$$(non(non(P))) \Leftrightarrow (P)$$

Preuve :

Utiliser les tables de vérité pour démontrer cette loi logique.

Exercice d'application :

Donner la valeur de vérité et écrire la négation des propositions suivantes :

1) $\exists x \in \mathbb{Z} : 2x = -3$
2) $\forall x \in \mathbb{R} : \ x^2 \geq x$
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} : n \leq x < n+1$
4) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x < y$
5) $\exists x \in \mathbb{R} : x - x^2 > 1$

3.Conjonction et disjonction

a.Définitions :

- La conjonction de deux propositions P et Q c'est la proposition qui est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies et fausse si l'une des deux propositions P et Q est fausse (les deux propositions peuvent être fausses).

On note (P et Q) ou ($P \wedge Q$).

- La disjonction de deux propositions P et Q c'est la proposition qui est vraie si l'une des deux propositions P et Q est vraie (les deux propositions peuvent être vraies) et fausse si les deux propositions P et Q sont simultanément fausses.

On note (P ou Q) ou ($P \vee Q$).

Dresser les tables de vérité correspondantes.

b.Propriétés :

-Commutativité

$$(\,P\ ou\ Q\,) \Leftrightarrow (Q\ ou\ P)\quad ;\qquad (\,P\ et\ Q\,) \Leftrightarrow (Q\ et\ P)$$

-Lois de Morgan

$$non(\,P\ ou\ Q\,) \Leftrightarrow (non\ P\ et\ non\ Q)$$

$$non(\,P\ et\ Q\,) \Leftrightarrow (non\ P\ ou\ non\ Q)$$

- Distributivité :

$$\big(\,P\ ou\ (\,Q\ et\ R\,)\big) \Leftrightarrow (\,P\ ou\ Q\,)\ et\ (\,P\ ou\ R\,)$$

$$\big(\,P\ et\ (\,Q\ ou\ R\,)\big) \Leftrightarrow (\,P\ et\ Q\,)\ ou\ (\,P\ et\ R\,)$$

c. Principe du tiers exclu

Si P est une proposition, alors la proposition « $P\ ou\ nonP$ » est toujours vraie.

Exercice d'application :

Préciser la valeur de vérité et écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

1. $\sqrt{2+3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $\sqrt{2}^2 \in \mathbb{N}$
2. 2 est premier ou 2 est impair
3. $2 < \pi \leq 3$

4. Implication

a) Définitions et propriété :

La proposition (Si P alors Q) notée P ⇒ Q est fausse lorsque l'on a simultanément la proposition P vraie et la proposition Q fausse, la proposition P ⇒ Q est vraie dans tous les autres cas.

D'où : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (nonP\ ou\ Q)$

Dresser la table de vérité correspondante

Remarque :

Négation d'une implication

$$non(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P\ et\ nonQ)$$

Exercice d'application :

On considère la proposition :

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15 \Rightarrow |\pi - 3{,}145| < 5 \times 10^{-3}$$

1) Quelle est sa valeur de vérité ? Justifier votre réponse.

2) Ecrire sa négation sans utiliser le symbole de la valeur absolue.

b) Définitions et propriétés :

-Réciproque d'une implication :

La réciproque de la proposition $(P \Rightarrow Q)$ c'est la proposition $(Q \Rightarrow P)$

- Equivalence et implication :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P))$$

- Transitivité de l'implication :

$$((P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ n'ont pas nécessairement la même valeur logique.

Exercice d'application :

Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}: (n\ est\ impair) \Rightarrow (n^2\ est\ impair)$

c) Condition nécessaire (CN) et condition suffisante (CS)

Si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie alors :

-Si P est vraie alors Q est vraie aussi, mais P peut être fausse et Q vraie. On dit que *P* est une condition suffisante (CS) pour *Q*.

-Pour que *P* soit vraie il faut alors que *Q* soit vraie.On dit que *Q* est une condition nécessaire (CN) pour *P*.

$$\underbrace{P}_{CS\ pour\ Q} \Rightarrow \underbrace{Q}_{CN\ pour\ P}$$

Enfin on peut dire aussi :

Si *P* ⇔ *Q alors P est une CNS pour Q*

Exercices d'application :

1) Préciser la (CN) et la (CS) dans la propriété suivante en justifiant votre réponse :

$$(x < 0\ et\ y < 0) \Rightarrow xy > 0$$

($x\ et\ y$ étant 2 nombres réels)

2) Soit x un nombre réel. Démontrer (sans résoudre l'équation) que :

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - 1 = x \Rightarrow x \geq -1$$

(Raisonnement par déduction)

3) Ecrire la négation de la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 < x \Rightarrow 0 < x < 1$$

IV. Autres raisonnements logiques :

1.Raisonnement par équivalences successives

Propriété :

Si $(P \Leftrightarrow Q_1 \Leftrightarrow Q_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Q_n \Leftrightarrow Q)$ et si Q est vraie alors P est vraie.

Exercices d'application :

1) Sachant que $a , b, c \; et \; d$ sont des nombres réels, montrer que :

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2(ab+cd) \Leftrightarrow (a=b \; et \; c=d)$$

2) Prouver en utilisant un raisonnement par équivalences successives que :

$$\forall x \in [-2;2] : x+\sqrt{4-x^2} \leq 2\sqrt{2}$$

2-Raisonnement par contraposition

Définition et Propriété :

La contraposée de la proposition $(P \Rightarrow \text{Q})$ c'est la proposition $(nonQ \Rightarrow \text{nonP})$

et on a :

$$(P \Rightarrow \text{Q}) \Leftrightarrow ((nonQ \Rightarrow \text{nonP}))$$

Exercice d'application :

Soient $x, y \; et \; z$ des nombres réels.

Prouver que :

$$x+y>2z \Rightarrow (x>z \; ou \; y>z)$$

3. Raisonnement par disjonction des cas

Le **raisonnement par disjonction de cas** s'utilise quand on veut démontrer une propriété P(x) dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E, et que la justification dépend de la valeur de x. On écrit alors $\text{E} = E_1 \cup \cdots \cup E_n$, et on sépare les raisonnements suivant que $x \in E_1$;$x \in E_2$; ... ;$x \in E_n$

Exercices d'application :

1) En distinguant les cas : 1) $n = 3k$ 2) $n = 3k + 1$ 3) $n = 3k + 2$ où $k \in \mathbb{N}$, prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n^3 - n}{3} \in \mathbb{N}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{x+1} = 1 - x$

4.Raisonnement par l'absurde :

Montrer qu'une proposition P est vraie est équivalent à montrer que la proposition (non P) est fausse. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que (non P) est une proposition vraie et à essayer de trouver une contradiction, par exemple qu'une assertion Q est vraie ainsi que sa négation.

c.a.d. montrer que :

$$(\bar{P} \Longrightarrow Q \ et \ \bar{P} \Longrightarrow \bar{Q}\ ) \Longrightarrow P$$

Exercice d'application :

1) Démontrer par l'absurde que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2) Démontrer par l'absurde que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n^2 \ est \ impair) \Longrightarrow (n \ est \ impair)$$

5.Raisonnement par récurrence (simple) :

Théorème :

Soit $n_0 \in IN$. On considère la propriété P_n définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. P_n est vraie pour l'entier n_0 ;

2. Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, « P_n est vraie. » implique « P_{n+1} est vraie. » ; alors on peut conclure que, pour tout $n \geq n_0$ la propriété P_n est vraie.

Exercices d'application :

Démontrer par récurrence que :

1) $\forall n \in \mathbb{N} :\ 21^n - 2^{2n}$ est divisible par 17

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^n > n$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}/n \geq 2 : (1+a)^n \geq 1 + na$ où a est un nombre réel et $a \geq -1$.

Cette dernière inégalité est connue sous le nom de Bernoulli.

V. Symbole « Somme : $\sum$ » et symbole « Produit $\prod$ »

Notations :

On utilisera une notation plus compacte pour une somme finie de nombre réels qui s'écrit $a_1 +\ a_2, +\ldots+a_n$ de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

De même on utilisera une notation plus compacte pour un produit fini de nombre réels qui s'écrit $a_1.\times a_2 \times\ldots\times a_n$ de la forme :

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

Propriétés : On a :

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \times \prod_{i=1}^{n} b_i$$

$$\prod_{i=1}^{n}(ka_i) = k^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Exemples :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

1) Somme des entiers naturels consécutifs :

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$$

2) Somme des carrés des entiers naturels consécutifs :

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^{2}$$

3) Somme des produits $k(k+1)$

$$1\times 2+2\times 3+\cdots+n\times(n+1)=\sum_{k=1}^{n}(k\,(k+1))$$

4) Produit des entiers naturels consécutifs :

$$1\times 2\times 3\times \ldots\times n=\prod_{k=1}^{n} k$$

Ce produit est appelé factoriel n et noté $n!$

5) Produits des fractions $\frac{k}{k+1}$

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{n}{n+1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}$$