ELEMENTS DE LOGIQUE

Niveau : 1ère Sciences expérimentales

Activités

1) Un élève a écrit le raisonnement suivant :

Si $a = b$ alors $ab = a^2$ donc $a^2 + b^2 - 2ab = ab + b^2 - 2ab$

D'où $(b-a)^2 = b^2 - ab$ c.à.d. $(a-b)^2 = b(b-a)$

Donc $b - a = b$ donc $b = a + b$. $Or\ a = b$ donc $b = 2b$ $d'o$ù : $1 = 2$

Découvre les fautes commises par cet élève.

2) Que pouvez-vous dire des énoncés suivants :

- Tous les nombres impairs supérieurs ou égaux à trois sont premiers
- Le carré d'un nombre réel peut être négatif.
- 2 est pair et 2 est impair

I-Principe de non-contradiction :

a. Définition et principe :

Une proposition mathématique *P* est une phrase formelle qui est

- soit vraie : on lui attribue la valeur logique 1 ou *V* .

- soit fausse : on lui attribue la valeur logique 0 ou *F*

Une proposition ne peut pas être à la fois vraie et fausse.

b. Table de vérité d'une proposition :

Soit P une proposition.

P
1
0

Ou encore

P
V
F

Exercice d'application :

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1) $2^{30} \times 2^{50} = 2^{80}$
2) $2^0 = 0$
3) $3 > \sqrt{8}$
4) $\pi = 3.14$
5) $\sqrt{2}\ est\ un\ entier\ rationnel$
6) $la\ fonction\ x \longmapsto 2x - 3\ est\ srictement\ croissante\ sur\ \mathbb{R}$

II- Connecteurs logiques

1.Equivalence et loi logique

Définition :

- Deux propositions P et Q sont dites équivalentes si elles ont la même valeur logique :

Elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

On note par $P \Leftrightarrow Q$ ou par $Q \Leftrightarrow P$.

La proposition $P \Leftrightarrow Q$ (ou $Q \Leftrightarrow P$) est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

On lit :

P si et seulement si Q

En abrégé : *P ssi Q*

Ou encore *P est équivalente à Q*

- *Une **loi logique** est une proposition composée qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples qui la composent.*

Table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exercice d'application :

Rappeler des théorèmes déjà étudiés et comprenant une équivalence logique.

Définition :

2 Négation

La négation d'une proposition P c'est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie. On note $nonP$ ou $\overline{P}$ ou $\neg P$

Propriété :

$$(non(non(P))) \Leftrightarrow (P)$$

Preuve :

Utiliser les tables de vérité pour démontrer cette loi logique.

Exercice d'application :

Ecrire la négation des propositions suivantes :

1) $2 = 1 + \sqrt{1}$
2) $1 < 2$
3) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
4) 3 $est\ un\ nombre\ impair$
5) π $est\ un\ rationnel$

3.Conjonction et disjonction

a.Définitions :

- La conjonction de deux propositions P et Q c'est la proposition qui est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies et fausse si l'une des deux propositions P et Q est fausse (les deux propositions peuvent être fausses).

On note (P et Q) ou $(P \wedge Q)$.

- La disjonction de deux propositions P et Q c'est la proposition qui est vraie si l'une des deux propositions P et Q est vraie (les deux propositions peuvent être vraies) et fausse si les deux propositions P et Q sont simultanément fausses.

On note (P ou Q) ou $(P \vee Q)$.

Dresser les tables de vérité correspondantes.

b.Propriétés :

-Commutativité

$$(\ P\ ou\ Q\ ) \Leftrightarrow (Q\ ou\ P)\quad ;\qquad (\ P\ et\ Q\ ) \Leftrightarrow (Q\ et\ P)$$

-Lois de Morgan

$$non(\ P\ ou\ Q\ ) \Leftrightarrow (non\ P\ et\ non\ Q)$$

$$non(\ P\ et\ Q\ ) \Leftrightarrow (non\ P\ ou\ non\ Q)$$

- Distributivité :

$$\big(\ P\ ou\ (\ Q\ et\ R\ )\big)\ \Leftrightarrow (\ P\ ou\ Q\ )\ et\ (\ P\ ou\ R\ )$$

$$\big(\ P\ et\ (\ Q\ ou\ R\ )\big)\ \Leftrightarrow (\ P\ et\ Q\ )\ ou\ (\ P\ et\ R\ )$$

Exercice d'application :

Préciser la valeur de vérité et écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ et $\sqrt{2}^2 \in \mathbb{N}$
2. 2 est premier ou 2 est impair
3. $2 < \pi \leq 3$

4. Implication

a) Définitions et propriété :

La proposition (Si P alors Q) notée P ⇒ Q est fausse lorsque l'on a simultanément la proposition P vraie et la proposition Q fausse, la proposition P ⇒ Q est vraie dans tous les autres cas.

D'où : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (nonP \ ou \ Q)$

Dresser la table de vérité correspondante

Remarque :

Négation d'une implication

$$non(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \ et \ nonQ)$$

Exercice d'application :

On considère la proposition :

$$3,14 < \pi < 3,15 \Rightarrow |\pi - 3,145| < 5 \times 10^{-3}$$

1) Quelle est sa valeur de vérité ? Justifier votre réponse.

2) Ecrire sa négation sans utiliser le symbole de la valeur absolue.

b) Définitions et propriétés :

-Réciproque d'une implication :

La réciproque de la proposition $(P \Rightarrow Q)$ c'est la proposition $(Q \Rightarrow P)$

- Equivalence et implication :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \ et \ (Q \Rightarrow P))$$

- Transitivité de l'implication :

$$((P \Rightarrow Q) \ et \ (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ n'ont pas nécessairement la même valeur logique.

Exercice d'application :

Donner la valeur de vérité de la proposition suivante :

$$1 = 2 \Rightarrow (1 + 1 = 2 + 1)$$

c) Condition nécessaire (CN) et condition suffisante (CS)

Si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie alors :

-Si P est vraie alors Q est vraie aussi, mais P peut être fausse et Q vraie. On dit que P est une condition suffisante (CS) pour Q.

-Pour que P soit vraie il faut alors que Q soit vraie.On dit que Q est une condition nécessaire (CN) pour P.

$$\underbrace{P}_{CS\ pour\ Q} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{Q}_{CN\ pour\ P}$$

Enfin on peut dire aussi :

Si $P \Leftrightarrow Q$ *alors P est une CNS pour Q*

Exercices d'application :

1) Préciser la (CN) et la (CS) dans la propriété suivante en justifiant votre réponse :

$$(x < 0\ et\ y < 0) \Rightarrow xy > 0$$

($x\ et\ y$ étant 2 nombres réels)

2) Soit x un nombre réel. Démontrer (sans résoudre l'équation) que :

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - 1 = x \Rightarrow x \geq -1$$

(Raisonnement par déduction)

III. Quantificateurs

1.Fonction propositionnelle

Énoncé mathématique qui comprend une ou plusieurs variables et qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables et faux dans les autres cas.

Exemples :

1) $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$
2) $x + 3 < 5$
3) $n^3 + 3n + 1$ est un entier impair. $n$étant un entier naturel.

2.Définitions et notations :

Les quantificateurs sont les signes qui expriment dans le langage mathématique la quantification, c.à.d. la quantité d'objets (aucun, tous, certains) pour lesquels une proposition est vraie.

Quantificateur existentiel : ∃

$\exists x \in E\ /P(x)$: Se lit il existe au moins un *x* dans *E* tel que *P*(*x*) soit vérifiée

S'il n'y a qu'un seul *x* dans *E* qui vérifie (*P*), on écrit :

$\exists!\, x \in E\ /\ P(x)$ et on lit il existe un unique $x\ dans\ E\ tel\ que\ P(x)$.

S'il n'y a qu'un seul *x* dans *E* qui vérifie (*P*), on écrit :

$\exists!\, x \in E\ /\ P(x)$ et on lit il existe un unique $x\ dans\ E\ tel\ que\ P(x)$.

Quantificateur universel : ∀

$\forall x \in E, P(x)$: Se lit pour tout $x\ de\ E\ , on\ a\ P(x)$

Cette phrase formelle signifie qu'il y a au moins un *x* dans *E* qui vérifie la propriété (*P*) (Il peut y avoir plusieurs).

2. Propriétés :

-L'ordre d'écriture des 2 quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est fondamental pour le sens d'une phrase formelle :

$$(\forall x \in E), (\exists y \in F)/\, P(x, y) \quad \ldots\ldots \, (\exists y \in F)/\, (\forall x \in E), P(x, y)$$

On peut permuter des quantificateurs de même nature.

Mais : On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

-Négation d'une proposition quantifiée :

$non(\forall x \in E), (\exists y \in F)/\, P(x, y) \Leftrightarrow (\exists x \in E), (\forall y \in F)/\, \mathrm{non}P(x, y)$

Exercices d'application :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

a. f est constante

b. f n'est pas constante

c. f est croissante sur $\mathbb{R}$

d. f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$

3. Le raisonnement par contre-exemple :

Pour montrer qu'une proposition du type "$\forall \mathrm{x} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(\mathrm{x})$ " est fausse, il suffit de montrer que sa négation "$\exists x \in E, non\ P(x)$ " est vraie. Il suffit donc de trouver un élément x de E qui vérifie ($non\ P(x)$) .

Exercice d'application :

1) Démontrer que la proposition suivante est fausse :

$$« \forall x \in \mathbb{R}^{*} : x + \frac{1}{x} \geq 2\ldots »$$

2) Démontrer que la fonction numérique $f : x \longmapsto x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire.

IV. Autres raisonnements logiques :

1.Raisonnement par équivalences successives

Propriété :

Si ($P \Leftrightarrow Q_1 \Leftrightarrow Q_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Q_n \Leftrightarrow Q$) et si Q est vraie alors P est vraie.

Exercices d'application :

1) Sachant que $a\ et\ b$ sont des nombres réels, montrer que :

$$a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$$

2) Prouver en utilisant un raisonnement par équivalences successives que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} : x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2-Raisonnement par contraposition

Définition et Propriété :

La contraposée de la proposition ($P \Rightarrow$ Q) c'est la proposition ($nonQ \Rightarrow$ nonP)

et on a :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((nonQ \Rightarrow \text{nonP}))$$

Exercice d'application :

Soient $x, y\ et\ z$ des nombres réels.

Prouver que :

$$x + y > 2z \Rightarrow (x > z\ ou\ y > z)$$

3. Raisonnement par disjonction des cas

Le **raisonnement par disjonction de cas** s'utilise quand on veut démontrer une propriété P(x) dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E, et que la justification dépend de la valeur de x. On écrit alors $\text{E} = E_1 \cup \cdots \cup E_n$, et on sépare les raisonnements suivant que $x \in E_1$;$x \in E_2$; ... ;$x \in E_n$

Exercice d'application :

En distinguant les cas : 1) $n = 3k$ 2) $n = 3k + 1$ 3) $n = 3k + 2$ où $k \in \mathbb{N}$, prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n^3 - n}{3} \in \mathbb{N}$$

4.Raisonnement par l'absurde :

Montrer qu'une proposition P est vraie est équivalent à montrer que la proposition (non P) est fausse. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que (non P) est une proposition vraie et à essayer de trouver une contradiction, par exemple qu'une assertion Q est vraie ainsi que sa négation.

c.a.d. montrer que :

$$(\bar{P} \Longrightarrow Q \ et \ \bar{P} \Longrightarrow \bar{Q}\ ) \Longrightarrow P$$

Exercice d'application :

Démontrer par l'absurde que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

5.Raisonnement par récurrence :

Théorème :

Soit $n_0 \in IN$. On considère la propriété P_n définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. P_n est vraie pour l'entier n_0 ;

2. Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, « P_n est vraie. » implique « P_{n+1} est vraie. » ; alors on peut conclure que, pour tout $n \geq n_0$ la propriété P_n est vraie.

Exercices d'application :

Démontrer par récurrence que :

1) $\forall n \in \mathbb{N} :\ 7^n - 1$ est divisible par 6

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^n > n$

3) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$