

Fonctions numériques à une variable réelle : Généralités

Niveau :1ère Sciences Expérimentales

Rappels des prérequis

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f

2) Montrer que f est paire

3) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$ tels que $a \neq b$.

a) Montrer que le taux d'accroissement de f entre a et b est :

$$T = \frac{1 - ab}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$

b) En déduire les variations de f sur les intervalles $[0; 1]$ et $[1, +\infty[$

c) Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} , en déduire les extrémums de f .

I. Comparer, majorer, minorer des fonctions réelles

1. Définitions :

On considère deux fonctions numériques f et g définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$.

- On dit que f est positive et on note $f \geq 0$ (respectivement négative : $f \leq 0$), si et seulement si $\forall x \in D: f(x) \geq 0$, (respectivement $f(x) \leq 0$)
- $f \leq g$ signifie que : $\forall x \in D: f(x) \leq g(x)$

Exercice d'application :

Soit la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x - x^2$

- 1) Etudier le signe de f sur \mathbb{R}
- 2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq x + 2$
- 3) Interpréter graphiquement les résultats des questions 1) et 2).

2. Définitions :

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$

- On dit que f est majorée sur D , s'il existe un réel M tel que $\forall x \in D : f(x) \leq M$
- On dit que f est minorée sur D , s'il existe un réel m tel que $\forall x \in D : f(x) \geq m$
- On dit que f est bornée sur D , si f est à la fois majorée et minorée.
- f est donc bornée s'il existe deux réels M et m tels que : $\forall x \in D : m \leq f(x) \leq M$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1+2x^2}{2+x^2}$

- 1) Montrer que f est minorée par $\frac{1}{2}$.
- 2) Montrer que f est minorée par 2.
- 3) La fonction f est-elle bornée ? Justifier votre réponse.
- 4) Interpréter graphiquement les résultats des questions précédentes.

Exercice 2 :

Prouver que la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2 + \sin x}{1 + x^2}$$

est bornée.

Propriété :

f est bornée sur $D \Leftrightarrow |f|$ est majorée c.à.d. $\exists M \in \mathbb{R}^+; \forall x \in D: |f(x)| \leq M$

Exemples :

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont bornées par -1 et 1 en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq \sin x \leq 1 ; \text{c.à.d. } |\sin x| \leq 1$$

Et $\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq \cos x \leq 1 ; \text{c.à.d. } |\cos x| \leq 1$

Exercice d'application :

1) Montrer par équivalences successives que $\forall x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$

2) **En déduire** que la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x \sin x}{1+x^2}$ est bornée.

3. Extrémums d'une fonction numérique

Définitions

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$, et x_0 un élément de D

✚ On dit que f admet un minimum relatif $f(x_0)$ en x_0 , signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que : $\forall x \in I: f(x) \geq f(x_0)$ et on note :

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$$

✚ On dit que f admet un maximum relatif $f(x_0)$ en x_0 , signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que : $\forall x \in I: f(x) \leq f(x_0)$, et on note :

$$f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Prouver que la fonction $f: x \mapsto x^2 + 2x - 3$ admet un minimum absolu au point $x_0 = -1$

Exercice 2 :

Soit la fonction $f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Montrer que f est majorée par -2 sur l'intervalle $] -\infty, 0[$
- 3) Résoudre l'équation $f(x) = -2$
- 4) Le nombre -2 présente-t-il un maximum relatif pour f ou non ? Justifier votre réponse.

II. Fonction périodique

1. Définition et propriété :

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie sur D .

On dit que f est périodique s'il existe un réel $T \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}: (x \in D \Leftrightarrow x + T \in D)$
2. $\forall x \in D: f(x + T) = f(x)$

On dit que T est une période de f et que f est T -périodique.

Et on a : $\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{Z}: x + nT \in D$ et $f(x + nT) = f(x)$

Exemples :

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont périodiques de période $T = 2\pi$

La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période $T = \pi$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Prouver que la fonction $f: x \mapsto \cos(3x) - 2\sin(3x)$ est périodique de période

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction $f: x \mapsto \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Montrer que f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$

2. Périodicité et courbe représentative.

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction T -périodique, il suffit donc de construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire suivant l'axe des abscisses.

Exemples :

Représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \tan x$

Exercice d'application :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} et périodique de période $T = 2$, et définie sur $[0; 2[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 3 - x & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

- 1) Représenter f graphiquement sur $[0; 2[$ puis sur $[2; 4[$ et sur $[-2; 0[$
- 2) Calculer $f(x)$ en fonction de x pour tout x de l'intervalle $[9; 10[$

III. Image d'un intervalle par une fonction

Activités :

Soit la fonction $f: x \mapsto 3 - 2x$

1) Ecrire en extension l'ensemble : $B = \left\{f(x) / x \in \left\{-1; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}\right\}$

2.a) Prouver que pour tout réel x on a :

$$x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \Leftrightarrow f(x) \in [0; 3]$$

b) En déduire l'ensemble $\left\{f(x) / x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]\right\}$

Définition

Soit f une fonction et I une partie de Df . L'image de I par f , notée $f(I)$ est l'ensemble des nombres de la forme $f(x)$ avec $x \in I$:

$$f(I) = \{f(x)/x \in I\}.$$

Exercices d'application :

Soit la fonction $f: x \mapsto x^2$

1) Montrer que $f([2, +\infty[) = [4, +\infty[$ et $f([-3; 3]) = [0; 9]$

2) Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe C_f de f puis déterminer graphiquement $f(]-\infty; -1])$ et $f([-3; 2])$

IV. Composée de 2 fonctions

Définition :

Étant donné deux fonctions réelles f et g , on définit la composition de f et g dans cet ordre, comme suit :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

La fonction $(g \circ f)$ est appelée la composée de g par f .

On lit cette composée « g rond f »

Remarque :

Le domaine de définition de $g \circ f : D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$

Notez bien que :

En général : $f \circ g \neq g \circ f$ c.à.d. que la composition des fonctions n'est pas une opération commutative.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Calculer et simplifier $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$

2) $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$

3) $f(x) = |x|$ et $g(x) = \frac{x}{x+1}$

Exercice 2 :

On considère les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ et } g(x) = \sqrt{x+1}$$

- 1) Prouver que : $D_{g \circ f} =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$
- 2) Calculer $g \circ f(x)$ pour tout x de $D_{g \circ f}$
- 3) Déterminer $D_{f \circ g}$ puis calculer $f \circ g(x)$ pour tout x de $D_{f \circ g}$
- 4) Donner deux justifications différentes pour montre que $f \circ g \neq g \circ f$

V. Monotonie de quelques fonctions de référence

Activités :

Etudier le sens de variation des fonctions :

1) $u: x \mapsto x^3$ sur \mathbb{R}

2) $v: x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$

Propriétés :

- La fonction $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur \mathbb{R} si $a > 0$, et strictement décroissante sur \mathbb{R} si $a < 0$.
- La fonction carré $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty, 0]$
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur les deux intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$
- La fonction cube $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R}

VI. Monotonie des fonctions $f + g$; $f + c^{te}$; $\lambda.f$; $g \circ f$

1. Propriétés :

Étant donné deux fonctions réelles f et g définies sur un intervalle I

- ❖ Si f et g ont même monotonie alors $f + g$ est monotone de même monotonie.
- ❖ Si f est monotone et g est constante alors $f + g$ est monotone de même monotonie.
- ❖ Soit λ un nombre réel non nul :
 - Si $\lambda > 0$, alors f et λf ont même monotonie
 - Si $\lambda < 0$, alors f et λf sont de monotonie contraire

Exercices d'application :

En utilisant la monotonie des fonctions usuelles, déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1) $f(x) = 5x^3 - 1$; $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$; $I = [0; +\infty[$

$$3) f(x) = 3 - 2x + x^2 ; I =]-\infty, 0]$$

$$4) f(x) = \frac{3}{x} + 1 - x^3 ; I =]0; +\infty[$$

$$5) f(x) = x^2 + 2\sqrt{x} - 3 ; I = [0; +\infty[$$

$$6) f(x) = 4x^3 + 2x - 3 ; I = \mathbb{R}$$

2. Variations d'une fonction composée

Théorème

Soit v une fonction monotone sur un intervalle J . Soit u une fonction monotone sur un intervalle I telle que : $\forall x \in I, on a u(x) \in J$, c.à.d. $u(I) \subset J$

- Si u et v ont le même sens de variation, alors $v \circ u$ est croissante sur I .

- Si u et v ont des sens de variation contraires, alors $v \circ u$ est décroissante sur I

Exercice d'application :

On considère la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -2x^3 + 1$

1) Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$

2) Prouver algébriquement que $f([0; 1]) = [-1; 1]$

3) Déterminer le sens de variation de la fonction $g: x \mapsto 3 - 2x$ sur l'intervalle $[-1; 1]$

4) En déduire le sens de variation de la fonction $g \circ f$ sur l'intervalle $[0; 1]$

5) Calculer $g \circ f(x)$ pour tout $x \in [0; 1]$