INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Niveau : Bac Sciences Mathématiques

Activités :

On considère la fonction numérique f continue sur le segment $[1;5]$ et définie par :

$$\begin{cases} si\ 1 \leq x \leq 3\ alors\ f(x) = 2 \\ si\ 3 < x \leq 5\ alors\ f(x) = 2x - 4 \end{cases}$$

1) Représenter f graphiquement dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1cm$

2) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1\ et\ x = 5$.

3) Soit la fonction F définie sur le segment $[1;5]$ par :

$$\begin{cases} si\ 1 \leq x \leq 3\ alors\ F(x) = 2x - 9 \\ si\ 3 < x \leq 5\ alors\ F(x) = x^2 - 4x \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction F est une primitive de f

b) Calculer $F(5) - F(1)$. Que remarquez-vous ?

I- Intégrale et primitives

1.Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux éléments de I

Si F est une primitive de f sur I alors le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive choisie $F\ de\ f$ et appelé intégrale entre a et b de f et on note :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarques :

Dans la notation $\int_a^b f(x)dx$ la variable x est « muette » et peut être remplacée par toute autre variable sans occurrence dans f :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \quad \ldots$$

Notion d'intégrale indéfinie (sans bornes) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant des primitives.

Par abus de langage, la notation $\int f(x)dx$ désigne aussi une primitive quelconque de f

Propriétés :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Exemples :

Calculer les intégrales :

$\int_0^1 \left(x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)dx$

$\int_0^{ln2} (e^{-x} + e^{2x})dx$; $\int_1^e \frac{lnx}{x} dx$

$\int_e^{e^2} \frac{1}{xlnx} dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{2+cosx} dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2x) + tan^2x)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tanx + \tan^3 x)dx$

$\int_0^1 xe^{x^2} dx$; $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2t+1}} dt$

$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$; $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}$;

2.Interprétation graphique :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

Propriétés :

- Si f est une fonction continue sur $[a;\ b], a < b$, alors l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a\ et\ x = b$ est : $\int_a^b |f(x)|dx$

- Si $f\ et\ g$ sont deux fonctions continues sur $[a;\ b]$,alors l'aire de la surface comprise entre les deux courbes $C_f\ \ et\ C_g$ et les droites d'équations $x = a\ et\ x = b$ est $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$. (en unités d'aire)

Remarque : 1 unité d'aire = $||\vec{i}||.\ ||\vec{j}||$

Exemples :

1) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe de la fonction $x \longmapsto e^x$ et les droites d'équations $y = 0\ ; x = 0\ et\ x = 1$

2) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe de la fonction

$x \longmapsto \frac{lnx}{x} + x - 1$ et les droites d'équations $y = x - 1\ ; x = \frac{1}{e}\ et\ x = 1$

3.Propriété :

Si f une fonction continue sur un intervalle $I\ et\ a$ un élément de I $(a = c^{te})$; alors la fonction G définie par :

$$\forall x \in I : G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

, est continue et dérivable sur I et est la primitive de f qui s'annule au point a et on a :

$$\forall x \in I : G'(x) = f(x) \text{ et } G(a) = 0$$

Exemple :

1) Montrer que la fonction G définie par : $\forall x \in \mathbb{R}: G(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$; est dérivable et calculer sa dérivée.

2) Calculer les limites : $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} \int_1^x e^{t^2} dt \right), \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \int_0^x ln\,(1 + t^2) dt \right)$

4. La relation de Chasles

Propriété :

Soient a, b, c trois éléments d'un intervalle I et f une fonction continue sur I.On a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Preuve :

Soit F une primitive de f. On a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \big(F(c) - F(a)\big) + \big(F(b) - F(c)\big)$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Exemples :

Calculer :

$$I = \int_{-ln2}^{ln2} |e^{-x} - 1|\, dx$$

$$J = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{|\ln^3 x|}{x} dx$$

$$K = \int_{-1}^{2} |x^2 - x| dx$$

5. Linéarité de l'intégrale :

Soient f , g deux fonctions continues sur I. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et tout$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

- $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ (λ est une constante réelle)

Preuve : *Utiliser les primitives et la définition de l'intégrale.*

Exemple :

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx+sinx} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx+sin} dx$

Calculer $I + J$ *et* $I - J$, en déduire les valeurs de I *et* J.

6. L'ordre et l'intégrale :

Propriétés :

- Si f est *une* fonction ***continue*** et ***strictement positive*** sur $[a;b]$, $\boldsymbol{a < b}$, alors

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

- Si f *et* g sont deux fonctions ***continues*** sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que $\boldsymbol{a < b}$ ***et*** *s*i $\boldsymbol{f < g}$ sur $[a;b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

- Si f est *une* fonction ***continue*** sur $[a;b]$, $a < b$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Exercices d'application :

1) Etudier le signe de la fonction numérique $F: x \longmapsto \int_1^x \ln^3 x \, dx$

2) Montrer que $\int_1^2 \left|\frac{cosx}{x}\right| dx \leq ln2$

3) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dx$

a) Calculer u_1 et montrer que la suite (u_n) est positive.

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n), en déduire qu'elle converge.

c)Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{2(n+)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire la limite de la suite (u_n)

7. Valeur moyenne d'une fonction :

a. Théorèmes et définition :

Si f est une fonction ***continue*** sur un intervalle I *et* $(a; b) \in I^2$ alors :

- Si $a < b$, et m, M sont deux nombres réels tels que $\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M,$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

- S'il existe un nombre réel positif M *tel que* $|f| \leq M$ *sur* I alors :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|$$

- Si f est une fonction ***continue*** sur un segment $[a, b]$, alors le nombre réel :

$$\boldsymbol{\mu_{[a;b]}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

est appelé valeur moyenne de la fonction *f* sur $[a, b]$.

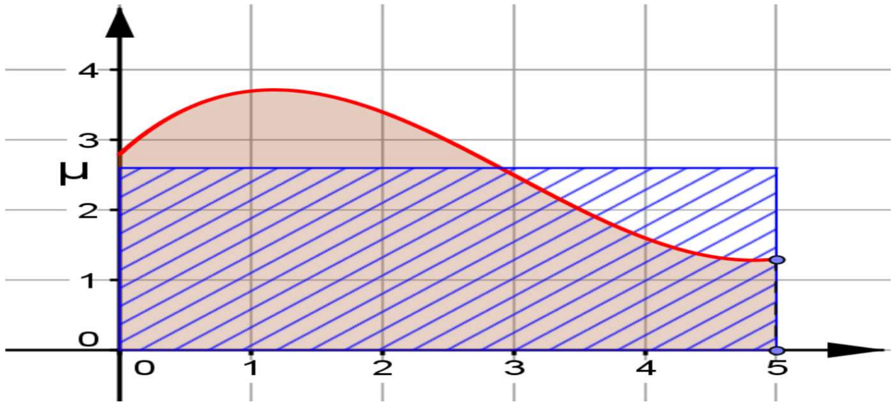
- Si f est une fonction ***continue*** sur un segment $[a, b]$, alors :

$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$: ***Formule de la moyenne.***

Ou encore : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$

Interprétation graphique :

Dans le cas d'une fonction positive, la valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a, b]$ est le réel **μ** tel que l'aire du rectangle de hauteur **μ** et de base (b-a) soit égal à l'aire comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a \; et \; x = b$. (Voir la figure)



<u>Exercice d'application :</u>

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^4}{1+x^2}$ *sur lintervalle* $[0; 2]$

(Remarquer que : $\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$ *)*

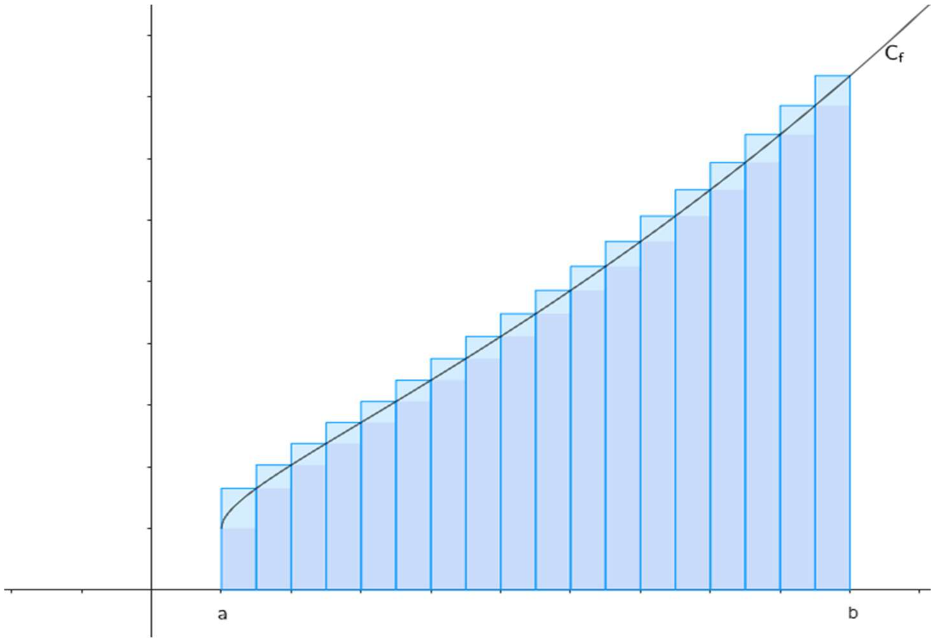
<u>8. Encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles</u>

<u>Théorème :</u>

Si f est une fonction ***continue*** sur un segment $[a, b]$, alors les deux suites (u_n)et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right); v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

sont convergentes et convergent vers la même limite $\int_a^b f(x)dx$



<u>Preuve du théorème dans le cas où f est continue et strictement monotone sur$[a, b]$:</u>

(La démonstration dans le cas général est hors du programme du niveau 2ème Bac Sc.Maths)

Supposons que *f est continue et strictement croissante sur* $[a, b]$ *et posons pour* tout

$k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$: $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$

On a alors *pour* tout $k \in \{0; 1; \dots; n -\}$: $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$:

$$x_{k+1} - x_k = a + (k+1)\frac{b-a}{n} - \left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \;,\; x_0 = a \text{ et } x_n = b$$

Comme *f est continue et strictement croissante sur* $[a, b]$, *alors :*

Pour tout $x \in [x_k; x_{k+1}]$:

$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k+1})$$

$$\Longrightarrow \; f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \leq f(x_{k+1})\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx$$

$$\Longrightarrow \; f(x_k)\frac{b-a}{n} \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \leq f(x_{k+1})\frac{b-a}{n}$$

$$\Longrightarrow \; \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$\Longrightarrow \; u_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq v_n$.(Relation de Chasles appliquée plusieurs fois)

$\Longrightarrow \; 0 \leq \int_a^b f(x)dx - u_n \leq v_n - u_n$,

Or $v_n - u_n = \frac{b-a}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right]$

$\Longrightarrow v_n - u_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_0)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$; d'où la suite (u_n) converge vers $\int_a^b f(x)dx$

D'où la suite (v_n) converge aussi vers $\int_a^b f(x)dx$.

Cas particulier :

Si f est une fonction **continue** sur $[0;1]$, alors les deux suites (u_n)et (v_n) définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right); v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, sont convergentes et convergent vers la même limite $\int_a^b f(x)dx$

Exercice d'application :

Montrer que la suite numérique définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ ,} pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*$$

converge et calculer sa limite.

<u>II. Calcul de volumes :</u>

L'espace est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

<u>1.Théorème :</u>

Soit (S) un solide délimité par deux plans d'équations $z = a$, $z = b$,$a < b$ et $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

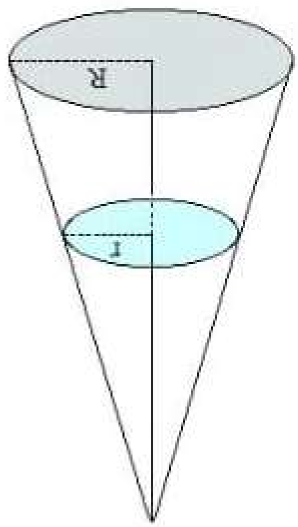
Pour tout $t \in [a;b]$on considère $P(t)$ le plan d'équation $z = t$ et $s(t)$ l'aire de la section du solide (S) avec le plan $P(t)$.

Si la fonction $s: t \longmapsto s(t)$ est continue sur $[a;b]$ alors le volume du solide (S) est en unités de volume est : $\int_a^b s(t)\mathrm{dt}$

<u>Remarque :</u> 1 unité de volume = $\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|.\|\vec{k}\|$

Exemple : Preuve du volume d'un cône de révolution :

On considère un cône droit de sommet O,d de hauteur h dont la base a un rayon R. A la hauteur $t \leq h$, le rayon de la section du cône avec un plan horizontal $z = t$ est tel que :



$$\frac{r(t)}{R} = \frac{t}{h}$$

D'où :$r(t) = \frac{Rt}{h}$. Donc l'aire de cette section est :

$$s(t) = \pi[r(t)]^2 = \pi R^2 \frac{t^2}{h^2}$$

D'où le volume du cône :

$$V = \int_0^h s(t)\mathrm{dt} = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h \mathrm{t^2dt} = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\frac{\pi R^2}{h^2}\frac{h^3}{3}$$

D'où : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

2. Cas particulier :

Propriété :

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe d'une fonction f continue sur un segment $[a;b]$ autour de l'axe des abscisses un tour complet est :

$$V = \pi \int_a^b [f(t)]^2 dt \quad u.v$$

Exercice d'application :

Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe de la fonction $f: x \longmapsto \sqrt{R^2 - x^2}$ sur $[-R; R]$ autour de l'axe des abscisses.($R > 0$)

Quelle est la nature de ce solide ? (On trouve : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$)

III. Techniques d'intégration

1. Intégration par parties :

Théorème :

Si $u\ et\ v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I,et si leurs dérivées $u'\ et\ v'$ sont continues sur I, alors, quels que soient $a\ et\ b$ éléments de I on a:

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Ou encore

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Preuve :

Utiliser la formule de dérivation : $u'v = (uv)' - uv'$

Exercices d'application :

1) En utilisant la technique d'intégration par parties calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\ sinxdx$

$\int_0^{ln}\ x^2e^x dx$

$\int_1^e x\ lnx\ dx$

$\int_0^1 x\, arctanx\, dx$

2) Déterminer la primitive de la fonction $x \longmapsto lnx$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui s'annule au point $a = 1$.

3) Déterminer la primitive de la fonction $x \longmapsto arctanx$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ qui s'annule au point $a = 0$.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p^2}{n^3} \cos\left(\frac{\pi p}{n}\right)$$

Prouver que la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et calculer la limite.

2. Intégration par changement de variables (par substitution):

Théorème :

Si f est une fonction ***continue*** sur un intervalle J *et* u est une fonction dérivable sur un intervalle *I* telle que $u(I) \subset J$ *et* u' soit continue sur *I ;* alors :

$$\forall(\alpha;\beta) \in J^2 : \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$$

Et si u est une bijection de I *dans* J , alors :

$$\forall(a;b) \in J^2 : \int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$$

Preuve :

Utiliser la formule de dérivation : $F'\big(u(t)\big).u'(t) = (F \circ u)'(t)$

Où F *est une primitive de* f *sur* J.

Méthode à retenir :

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$: on pose : $x = u(t)$ et on a : $dx = u'(t)dt$ et on change les bornes.

Si u est une bijection on calculera si c'est possible $u^{-1}(x) = t$ …

Exercices d'application :

Calculer les intégrales suivantes en appliquant les changements de variable donnés :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2xcos(x^2)dx$; poser $t = x^2$

2) $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx$; poser $z = x^3$

3) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx$; poser $y = e^x$

4) $\int_0^{ln2} \sqrt{e^x-1}\, dx$; poser $u = \sqrt{e^x-1}$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx$; poser $t = sinx$

6) $\int_0^{ln2} \frac{e^x}{1+e^x}\ln(1+e^x)\, dx$; poser $u = 1 + e^x$

IV. Fonctions définies par une intégrale de la forme : $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Propriétés :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et f est une fonction continue sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$ et$v(I) \subset J$ et $a \in I$; alors :

Les fonction $\varphi: x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)dt$ et $\psi: x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ sont dérivables sur I et on a:

$$\forall x \in E: \varphi'(x) = u'(x)f(u(x)); \psi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Preuve :

Remarquer que :

$\varphi = F \circ u$ et $\psi = F \circ v - F \circ u$ avec *F* une primitive de *f sur I* ...

Exercices d'application :

1) Montrer que la fonction numérique :

$$F: x \longmapsto \int_{x^2}^{e^{2x}} \frac{\ln(1+t^2)}{2+t^2} dt$$

Est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) Même question pour la fonction :

$$G: x \longmapsto \int_{2x}^{1} \frac{\mathrm{sint}}{1+e^t} dt$$

3) Etudier la parité de la fonction numérique :

$$F: x \longmapsto \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt$$

(On posera $t = -u$)