<u>*Cours de Limites et continuité des fonctions numériques*</u>

Niveau : 2ème bac Sciences expérimentales

Activités :

Activité 1 :

Soit f une fonction numérique à variable réelle.

Etudier la limite de f au point a et comparer les résultats possibles avec $f(a)$ dans les cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} \\ f(1) = 2 \end{cases}$; $a = 1$

2) $\begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} & si\ x > \sqrt{2} \\ f(x) = \frac{x^3-2\sqrt{2}}{2-x^2} & si\ x < \sqrt{2} \\ f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{cases}$; $a = \sqrt{2}$

Activité 2 :

Représenter graphiquement la fonction numérique f sur l'intervalle I et étudier sa limite au point a et donner une (ou des) remarque (s) à propos du point $M(a, f(a))$ dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x) = x & si\ 2 \leq x \leq 5 \\ f(x) = 4 - x & si - 1 \leq x < 2 \end{cases}$; $a = 2$; $I = [-1; 5]$

2) $\begin{cases} f(x) = 1 + x^2 & si - 2 \leq x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x+1} & si\ 0 < x \leq 3 \\ f(0) = 3 \end{cases}$; $a = 0$; $I = [-2; 3]$

I-Continuité en un point :

1-Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et a un élément de I.

i. $f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f = f(a)$

Si f $n'estpas\ continue\ en\ a\ on\ dit\ qu'elle\ est\ discontinue\ en\ a$

ii. Si f est définie sur un intervalle $[a, b[\subset \mathbb{R}$:

$$f \text{ est continue à droite en } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f = f(a)$$

iii. ii. Et si f est définie sur un intervalle $]b, a] \subset \mathbb{R}$:

$$f \text{ est continue à gauche en } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f = f(a)$$

2-Théorème :

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow f \text{ est continue à droite et à gauche en } a$$

Exercice d'application :

Etudier la continuité de la fonction f au point x_0 dans chacun des cas suivants :

1. $\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases} ; x_0 = 0$

2. $\begin{cases} f(x) = \frac{1+x}{1+x^3} ; x \neq -1 \\ f(-1) = \frac{1}{3} \end{cases} ; \quad x_0 = -1$

3. $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2-x-1}{3x^3-5x^2+6x-4} ; x \neq 1 \\ f(1) = \frac{3}{5} \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} & si\ x > 4 \\ f(4) = \frac{1}{20} & \\ f(x) = \frac{1-\sqrt{5-x}}{x-4} & si\ x < 4 \end{cases}$

II-Continuité sur un intervalle réel

1-Définitions :

Soient $a\ et\ b\ des\ réels\ tels\ que\ a < b$.

$f\ est\ continue\ sur\ l'intervalle\ ]a,b[\ signifie\ que\ f\ est\ continue\ en\ tout\ point\ de]a,b[$

$f\ est\ continue\ sur\ l'intervalle\ ]a,b]\ signifie\ que: \begin{cases} f\ est\ continue\ en\ tout\ point\ de]a,b[\\ et\ f\ est\ continue\ à\ gauche\ en\ b \end{cases}$

$f\ est\ continue\ sur\ l'intervalle [a,b[signifieque: \begin{cases} f\ est\ continue\ en\ tout\ point\ de]a,b[\\ et\ f\ est\ continue\ à\ droite\ en\ a \end{cases}$

$f\ est\ continue\ sur\ l'intervalle [a,b]\ signifieque: \begin{cases} f\ est\ continue\ en\ tout\ point\ de]a,b[\\ et\ f\ est\ continue\ à\ droite\ en\ a \\ et\ f\ est\ continue\ à\ gauche\ en\ b \end{cases}$

2. Continuité des fonctions de référence :

Théorèmes :

i. Toutes les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

ii. Les fonctions : $x \longmapsto |x|$; $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

iii. Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son domaine de définition.

iv. La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition $D_{tan} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

v. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

Exercice d'application :

Montrer que les fonctions suivantes sont continues en tout point de leurs domaines de définition :

$$f: x \longmapsto x^3 - \sqrt{3}x^2 + \sqrt{5}x - \frac{3}{2} \ ; \ g: x \longmapsto \frac{2x - x^4 - 1}{x^2 - 2}$$

3-Continuité de la fonction partie entière

Activité :

Soit E la fonction partie entière.E est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{Z}: E(x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, E(x)$ est l'unique entier relatif n vérifiant :

$n \leq x < n + 1$ c.à.d. : $E(x) \leq x < E(x) + 1$

1) Déterminer :

$$E(-10), E\left(\frac{1}{2}\right), E\left(-\frac{1}{2}\right), E\left(-\frac{3}{2}\right), E\left(\sqrt{5}\right), E(-\pi), E(2^5)$$

2.a) Déterminer $E(x)$ pour tout x des intervalles :

$$[-2; -1[; \ [-1; 0[\ ; [0; 1[\ ; \ [1; 2[$$

b) Représenter graphiquement la fonction E sur l'intervalle $[-2; 2[$

3) Montrer que la fonction E est continue sur ces intervalles.

4) Etudier la continuité de E aux points -1 ; 0 et 1

5) La fonction E est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

III- Opérations sur les fonctions continues

1- Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- les fonctions $|f|, \lambda f avec \lambda \in \mathbb{R}, f + g, fg$ sont continues sur I

-Si $\forall x \in I: g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}, \frac{f}{g}$ sont continues sur I

- Si $\forall x \in I: f(x) \geq 0$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I

Exercice d'application :

Dans chacun des cas montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I :

1. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x-1}$; $I =]1; +\infty[$

2. $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$; $I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; $I = [1; +\infty[$

4. $f(x) = \left|\frac{2x+1}{x^3-1}\right|^3$; $I =]-\infty; 1[$

2.Continuité et limite d'une fonction composée :

Propriété :

Soit l un nombre réel.

Si f est une fonction numérique telle que $\lim\limits_{a} f = l$ et si g est une fonction numérique continue au point l alors $\lim\limits_{a} g \circ f = g(l)$

Remarque :

Cette propriété reste valable en $+\infty$, $-\infty$, a^+ , a^-

Conséquence :

Si f est une fonction numérique continue sur un intervalle I et g est une fonction numérique continue sur un intervalle J telle que $f(I) \subset J$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I

Exercice d'application :

1) Montrer que la fonction numérique $f: x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$ est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$

2) Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. (Justifier votre réponse)

IV. Image d'un intervalle par une fonction numérique.

Activités :

Représenter graphiquement la fonction numérique $f: x \longmapsto 2x - x^2$, en déduire graphiquement les images par f des intervalles suivants :

$$[0;1]\,,[1;2],[-1;2]\,,]-\infty,0];\ [3;+\infty[$$

1. Théorème :(Admis)

i. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

ii. L'image d'un segment (intervalle fermé borné) $[a, b]$ est un segment$[m, M]$ où m est le plus petit élément et M le plus grand élément de $f([a, b])$

2-Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

Propriétés : Soient *a* et *b* deux nombres réels tels que *a*<*b* et f est une fonction numérique définie sur un intervalle *I*. On a les résultats suivants :

	Image de l'intervalle I par la fonction f	
L'intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f, f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{a^+} f\right[$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f, f(a)\right]$
$]a, b[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f\right[$
$]-\infty, +\infty[$	$\left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{-\infty} f\right[$
$[a, +\infty[$	$\left[f(a), \lim\limits_{+\infty} f\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f, f(a)\right]$
$]-\infty, a[$	$\left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{a^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{a^-} f, \lim\limits_{-\infty} f\right[$

Exercices d'application :

1) Etudier les variations de la fonction numérique $f: x \longmapsto \frac{x-2}{x+1}$, puis déterminer par f les images des intervalles suivants :

$$]-\infty; -1[\ ;\ [0; 1[\ ,]-1, 2]\ et]-1, +\infty[$$

2) Même questions pour : $f: x \longmapsto 2x^2 + 4x - 1$ et les intervalles :

$$[-1; 0], [-2; -1]\ , [-2; 0[\ et\ ]-\infty; -2]$$

3-Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème(T.V.I) :

Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ alors toute valeur k intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte au moins une fois c.à.d. il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire 1 :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$

Corollaire 2 :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a, b]$et si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Remarque :

Le TVI sert à localiser (encadrer) et à calculer une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$

Interprétation graphique :

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit la fonction numérique $f: x \longmapsto x^2 - \sqrt{x} - 1$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0; 1[$ au moins une solution.

Exercice 2 :

Soit la fonction numérique $f : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 2$

1) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-1; 3[$au moins une solution.

2) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire que le nombre 1 n'est pas la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]-1; 3[$

4.a) Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique α solution dans $]-1; 0[$

b) Vérifier que $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$.

c) Situer le nombre α par rapport au nombre $\frac{3}{4}$.

VI. Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

Activité :

Soit la fonction $f: x \longmapsto x^2$ définie sur $I = [0; +\infty[$

1) Résoudre dans I les équations suivantes :

$$f(x) = 0\,;f(x) = 1\,;f(x) = 2\,;f(x) = 4\,;f(x) = y\ avec\ y \in [0;+\infty[$$

2) Tracer dans un repère orthonormé la courbe de f et la droite d'équation $y = x$

3) Soit g la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

Pour tous x et y de $[0;+\infty[$:

$$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

A partir de cette définition et sans utiliser l'expression de g tracer la courbe de la fonction g dans le même repère.

<u>Définition et théorème de la fonction réciproque et propriétés :</u>

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout $y \in f(I)$ l'équation $f(x) = y$ admet dans I une unique solution.

La fonction notée par f^{-1} et définie sur l'intervalle $J = f(I)$ par :

Pour tout $x \in f(I)$ et pour tout $y \in I$:

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

est appelée la fonction réciproque de f.

De plus :

- La fonction f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $J = f(I)$ et a le même sens de variation que f
- Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

<u>Exercice 1 :</u>

1) Etudier les variations de la fonction $f: x \longmapsto x^3 + 3x - 5$

2) En déduire que l'équation $x^3 + 3x - 5 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $I = [-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$.

1- Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'on déterminera puis représenter $f\ et\ f^{-1}$ graphiquement dans le même repère orthonormé.

2- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

VII . Fonction racine n'ième

Activités :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 - 2 = 0$
2. $x^3 - 8 = 0$
3. $x^4 - 16 = 0$
4. $x^6 + 1 = 0$
5. $(2x-1)^3 + 1 = 0$

1.Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

La restriction de la fonction $f: x \mapsto x^n$ sur $[0; +\infty[$ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Elle admet une fonction réciproque appelée fonction racine nième et se note $\sqrt[n]{\ }$ et définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}: \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

On notera aussi : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Exercice d'application :

Calculer :

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} \; ; \; \sqrt[3]{0{,}001} \, , \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \; ; \sqrt[6]{10^{18}}$$

2.Continuité et limite de la fonction $\sqrt[n]{}$

Propriété :

Soit u une fonction positive sur un intervalle I , $x_0 \in I$.

i. si u est continue sur I alors $\sqrt[n]{u}$ est continue sur I

ii.si $\lim\limits_{x_0} u = l \in [0, +\infty[$ alors $\lim\limits_{x_0} \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{l}$

iii.si $\lim\limits_{x_0} u = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} \sqrt[n]{u} = +\infty$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2 - x^3 - 3} = +\infty$

Exercice 2 :

On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x^4 + 3x^2 + 1}}{x}$

a) Vérifier que $\forall x > 0 : f(x) = \sqrt[4]{2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}$

b) En déduire la valeur de la limite de f en $+\infty$

Exercice 3 :

On pose : $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x - 1} - 2x$

a) Vérifier que $\forall x > 1 : f(x) = x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} - 2\right)$

b) En déduire la valeur de la limite de f en $+\infty$

Exercice 4 :

On pose : $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x$

a) Vérifier que $\forall x > 2 : f(x) = \frac{-2}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1-\frac{2}{x}} + 1}$

b) En déduire la valeur de la limite de f en $+\infty$

Exercice 5 :

Calculer la limite :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{x}}{x-1}$$

3.Opérations sur les radicaux :

Propriétés :

Pour tous a, b de $[0; +\infty[$ et pour tous n, p de $\mathbb{N}^* - \{1\}$ on a :

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a \quad ; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad ; \quad \sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \quad ; \; a \neq 0 \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} ; b \neq 0$$

Exercice d'application :

On pose :

$$A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{16} \times \sqrt[4]{32}}{\sqrt[12]{8} \times \sqrt{2}}$$

Montrer que : $A = 4$

4. Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif :

a.Définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$.On pose pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$x^{\frac{p}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

b.Limite de la fonction $x \mapsto x^r$ ou $r \in \mathbb{Q}^*$ en $+\infty$

Propriété :

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$.On a :

Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r = +\infty$

Et si $r < 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r = 0$

c.Opérations sur les puissances rationnelles

Propriétés :

Pour tous $r, r' de \mathbb{Q}$ et $a, b\ de\ \mathbb{R}_+^*$ ona :

$$a^r a^{r'} = a^{r+r'}\ ;\ (ab)^r = a^r b^r\ ;\ (a^r)^{r'} = a^{rr'}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}\quad ;\ \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}\quad ;\ \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$$

Exercice d'application :

On pose :

$$B = \frac{12^{-\frac{3}{4}} \times \sqrt[3]{54^2} \times 6^{\frac{1}{2}}}{\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

Montrer que : $B = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$