

Suites Numériques

Niveau : 1^{ère} Sciences Expérimentales

Activités :

Activité 1 :

On considère les successions de nombres :

la liste (u_n) : $-5 ; -2 ; 1 ; 4 ; 7 ; 10 \dots$, on notera :

$$u_0 = -5 ; u_1 = -2 ; u_2 = 1 ; u_3 = 4 ; u_4 = 7 ; u_5 = 10 \dots$$

- 1) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 2) Démontrer cette conjecture par récurrence.
- 3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

Activité 2 :

On considère la liste : (v_n) : $1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 \dots$ que l'on note :

$$v_0 = 1 ; v_1 = 2 ; v_2 = 4 ; v_3 = 8 ; v_4 = 16 ; v_5 = 32 \dots$$

- 1) Donner l'expression explicite de v_n et démontrer la par récurrence.
- 2) Donner la relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n

Activité 3 :

On considère la liste (F_n) : $1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; \dots$

$$F_0 = 1 ; F_1 = 1 ; F_2 = 2 ; F_3 = 3 ; F_4 = 5 ; F_5 = 8 \dots$$

Relation de récurrence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $F_0 = F_1 = 1$.(Suite de Fibonacci)

Calculer F_{12}

I. Définition et représentation graphique d'une suite

1. Définition :

Une suite numérique (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n est appelé le terme de rang n de cette suite (ou d'indice n)

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n) = u_n$$

2. Définir une suite

a. De façon explicite

Une suite numérique (u_n) est définie de façon explicite si le terme général u_n s'exprime en fonction de n : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$

b. Par récurrence

Définition :

Lorsque le terme général u_n dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une relation de récurrence et par un ou plusieurs premier(s) terme(s).

La suite est dite récurrente à un terme si u_n ne dépend que du terme précédent. u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$

La suite est dite récurrente à deux termes si u_n dépend des deux termes qui le précèdent. u_0, u_1 et $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$

3. Représentation graphique d'une suite

Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées (n, u_n)

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a) $u_n = 3 - 2n$ b) $v_n = 3n^2 - 1$

Exercice 2 :

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a) Pour tout entier n , on donne :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$$

b) Pour tout entier n , on donne :
$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 2 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Représenter dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 4$ les six premiers termes de la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

II. Suite majorée, minorée, bornée

Activité :

Soit (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

1) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N} : -\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq 1$

Définitions et propriété :

- Une suite (u_n) est dite majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$
- Une suite (u_n) est dite minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq m$
- Une suite (u_n) est dite bornée ssi elle est majorée et minorée
- Une suite (u_n) est bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{3n+2}{n+1}$

Montrer que cette suite est minorée par 2 et majorée par 3. Est-elle bornée ?

Exercice 2 :

Montrer que la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 3\cos n$ est bornée.

Exercice 3 :

Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 1$

Montrer par récurrence que la suite (w_n) est majorée par 2.

III. Sens de variation d'une suite

Activités :

1) Soit (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 2^n$

Vérifier que $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} > u_n$

2) Soit (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{2^n}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} < v_n$

3) Soit (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : w_{n+1} = 2w_n - 1$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : w_n = 1$

Définitions

► Une suite (u_n) est dite croissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$

► Une suite (u_n) est dite décroissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$

► Une suite (u_n) est dite constante ssi : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n$

Exercices d'application :

Exercice :

1) Soit la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{-n+1}{n+2}$

Montrer que cette suite décroissante.

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3$

- a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : v_n \leq 6$
 - b) Montrer que la suite (v_n) est croissante.
 - c) En déduire que la suite (v_n) est minorée par 5
- 3) Représenter graphiquement dans un même repère la droite d'équation $y = x$ et les deux suites (u_n) et (v_n) .

IV. Exemples de suites :

Activités :

On considère les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3 + 2n \text{ et } v_n = \frac{2^{2n+2}}{3^n}$$

- 1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = 2$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4}{3}$
- 2) Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.

1. Suite arithmétique

Définition et propriétés

- ▶ Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r ssi : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$
- ▶ Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors :
- ▶ $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 : u_n = u_p + (n - p)r$
- ▶ $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 / n > p : u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}$
- ▶ a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ssi $b = \frac{a+c}{2}$

Remarque :

Sens de variation d'une suite arithmétique (u_n) de raison r :

Si $r > 0$: (u_n) est croissante, et si $r < 0$ alors (u_n) est décroissante

Démonstrations :

Terme général d'une suite arithmétique ?

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation

$u_{n+1} = u_n + r$. On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ u_3 = u_2 + r \\ \dots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{En additionnant membre à membre ces } n \text{ égalités, on obtient :} \\ u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + nr \end{array}$$

Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques : $u_n = u_0 + nr$

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Pour simplifier calculons $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_n + u_{n-1} + \dots + u_0$

$$\Rightarrow 2S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_n + u_0)$$

Or pour tout entier k compris entre 0 et n on a :

$$u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + (u_0 + nr) = u_0 + u_n : \text{ Ne}$$

dépendant pas de k . De plus le nombre de tels termes dans $2S$ est $n + 1$; d'où :

$$2S = (n + 1)(u_0 + u_n) \Rightarrow u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

Trois termes consécutifs a , b et c d'une suite arithmétique ?

$$\text{On a } b - a = c - b \Rightarrow 2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}.$$

(Moyenne arithmétique de a et c)

Exercices d'application :

Exercice 1 :

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 + 2n$ est-elle arithmétique ?

Exercice 2 :

La suite (v_n) définie par : $v_n = 1 + \sqrt{n}$ est-elle arithmétique ?

Exercice 3 :

Déterminer l'expression, en fonction de n , de la suite arithmétique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_4 = 5$ et $u_{20} = 53$.

- a) Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de la suite (u_n) .
- b) Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 5 :

Expliquer en utilisant une suite arithmétique convenable pourquoi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 6 :

On pose : $S = 33 + 36 + 39 + \dots + 267$

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_3 = 33$, et de raison $r = 3$.

- 1) Déterminer l'entier n sachant que : $u_n = 267$
- 2) En déduire la valeur de S .

2. Suite géométrique

Définition et propriétés

- ▶ Une suite (u_n) est dite géométrique de raison q ssi : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = qu_n$
- ▶ Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors :
- ▶ $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 : u_n = u_p q^{n-p}$
- ▶ $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 / n > p : u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
- ▶ a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique ssi $b^2 = ac$

Démonstrations

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nul et de premier terme u_0 non nul.

Terme général ?

Comme $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q \times u_n$.

Alors tous les termes de la suite sont non nuls et on a :

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = q \times u_0 \\ u_2 = q \times u_1 \\ u_3 = q \times u_2 \\ \dots \\ u_{n-1} = q \times u_{n-2} \\ u_n = q \times u_{n-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{En multipliant membre à membre ces } n \text{ égalités, on obtient :} \\ u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times q^n \end{array}$$

Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut simplifier aux deux membres par les facteurs identiques, et on obtient : $u_n = u_0 \times q^n$

Somme de termes consécutifs ?

Pour simplifier calculons $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$\Rightarrow S = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + u_0 q^3 + \dots + u_0 q^n$$

$$\Rightarrow qS = qu_0 + u_0 q^2 + u_0 q^3 + u_0 q^4 + \dots + u_0 q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S - qS = u_0 - u_0 q^{n+1} \Rightarrow S = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Trois termes consécutifs a , b et c d'une suite géométrique ?

Supposons $abc \neq 0$ donc $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac$.

Si a et c sont positifs alors $b = \sqrt{ac}$ est appelé moyenne géométrique de a et c

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Déterminer l'expression en fonction de n de la suite géométrique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n \end{cases}$$

Exercice 2 :

Considérons la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $u_4 = 4$ et $u_7 = 256$.

- Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n) .
- En déduire une expression de la suite en fonction de n .

Exercice 3 :

Calculer les sommes $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$ et $S_2 = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$

où $n \in \mathbb{N}$ et $n > 2$