Etude analytique de la droite dans le plan

Le plan sera muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Activités :

Activité 1 :

On considère dans le plan les points $A(-1;2) et\ B(1;-2)$

1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB)

2. En déduire l'équation réduite de la droite (AB)

3. Ecrire l'équation réduite de la droite (Δ) parallèle à (AB) et passant par le point $C(1;-1)$.

4. Trouver l'équation réduite de la droite (Δ') perpendiculaire à (AB) en A.

Activité 2 :

On considère les points $E(4;1), F(-2;-2) et\ G\left(1;-\frac{1}{2}\right)$

1. Déterminer les couples de coordonnées $(a,b) et\ (a',b')$ des vecteurs $\overrightarrow{EF}\ et\ \overrightarrow{EG}$ respectivement.

2. En déduire le réel k tel que : $\overrightarrow{EF} = k.\overrightarrow{EG}$.

Que peut-on dire des points $E, F\ et\ G$?

Calculer $ab' - ba'$

3. Calculer la distance EG, en déduire la distance EF

4. Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[EF]$

Activité 3 :

Soit une droite (Δ) passant par le point $A(2;1)$ et de coefficient directeur m.

Sans déterminer l'équation tracer (Δ) dans les cas suivants :

1. $m = 2$
2. $m = -\frac{3}{2}$

I. Condition de colinéarité de 2 vecteurs

1. Déterminant de 2 vecteurs

Définition :

On considère 2 vecteurs $\vec{u}(a,b)$ et $\vec{v}(a',b')$

Le déterminant du couple $(\vec{u},\vec{v})$ est le réel $ab' - ba'$ noté :

$$det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

2. Propriété :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\vec{u},\vec{v}) = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires si et seulement si $det(\vec{u},\vec{v}) \neq 0$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

On considère les vecteurs :

$$\vec{u} = 2\sqrt{3}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\jmath}\,, \vec{v} = 6\vec{\imath} - \vec{\jmath}\ et\ \vec{w} = 3\vec{\imath} - (2m+1)\vec{\jmath}$$

1. Montrer que $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires.

2. Déterminer le réel m pour que $\vec{v}\ et\ \vec{w}$ soient colinéaires

Exercice 2 :

On considère les points $A(-1;2), B(1;-2) et\ C(1;1)$

1. Calculer $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$

2. Les points $A, B\ et\ C$ sont-ils alignés ? Justifier vote réponse.

II. Définition de la droite dans le plan

Soient dans le plan un point A et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k.\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On la note par : $D(A, \vec{u})$

Remarque :

Deux droites $D(A,\vec{u})$ et $D(B,\vec{v})$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires et sécantes si et seulement si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercices d'application :

Soient les points $A(2;-1)\ et\ B((3;2)$

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$

III. Représentation paramétrique d'une droite

Activité :

Soit $M(x,y)$ un point d'une droite $D(A,\vec{u})$, telle que $A(3\,;-2)$ et $\vec{u}(-1\,;4)$. Montrer qu'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$$

Propriété et définition :

La droite $D(A,\vec{u})$ passant par le point $A(x_A, y_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha\,;\beta)$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Ce système d'équations est appelé une représentation paramétrique de la droite $D(A,\vec{u})$.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Ecrire une représentation paramétrique de la droite (AB) sachant que A(0 ;-2) et B(2 ;-3)

Exercice 2 :

On considère les droites :

$$(\Delta_1):\begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}t \\ y = 1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$(\Delta_2):\begin{cases} x = -k \\ y = 1 + 2k \end{cases} ; k \in \mathbb{R}$$

$$(\Delta_3):\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles strictement parallèles.

2. Montrer que la droite (Δ_3) coupe les droites (Δ_1) et (Δ_2) respectivement en A et B sans les déterminer.

3. Vérifier que $A(3\,;-1)$ et trouver le couple de coordonnées de B.

IV. Equation cartésienne d'une droite

Activités :

Soit $M(x, y)$ un point d'une droite $D(A, \vec{u})$, telle que $A(3\,;-2)$ et $\vec{u}(-1\,;4)$.

Calculer $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$, en dédire que : $4x + y - 10 = 0$

1. Propriétés :

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $(a, b) \neq (0; 0)$

- Toute droite du plan a une équation cartésienne de la forme : $ax + by + c = 0$.
- Réciproquement l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,; a)$.

Remarque :

Si $\vec{u}(\alpha, \beta)$ est un vecteur directeur d'une droite (Δ), alors le réel $m = \frac{\beta}{\alpha}$ est le coefficient directeur de (Δ).

2. Equations de droites particulières

- Axe des ordonnées : $x = 0$
- Droite parallèle à l'axe des ordonnées : $x = a$.

(a est un réel)

- Axe des abscisses : $y = 0$
- Droite parallèle à l'axe des abscisses : $y = b$.

  (b est un réel)

- Droite passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de coefficient directeur m : $y - y_0 = m(x - x_0)$

__Exercices d'application :__

__Exercice 1 :__

Trouver une équation cartésienne de la droite (AB) sachant que $A(0\,;-2)\ et\ B(-1\,;-1)$.

__Exercice 2 :__

On considère les droites :

$$(\Delta_1): 2x - 4y + 1 = 0$$

$$(\Delta_2): -x + 2y - 1 = 0$$

$$(\Delta_3): 3x + 5y + 2 = 0$$

$$(\Delta_4): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

1. Etudier la position relative de $(\Delta_1)\ et\ (\Delta_2)$
2. Etudier la position relative de $(\Delta_1)\ et\ (\Delta_3)$
3. Etudier la position relative de $(\Delta_1)\ et\ (\Delta_4)$