Applications : Généralités

Niveau :1ère Sciences Mathématiques

Activités :

1) On considère la fonction numérique f d'une variable réelle x par :

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

Quels sont les réels qui n'ont pas d'image par f ?

2) Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x$

Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \{f(x)/x \in \mathbb{Z} \ et \ |x| < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z}/f(x) = 3\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \geq 3\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}/f(x) = -2\}$$

I.1. Définition :

Etant donnés deux ensemble $E \ et \ F$, on appelle application de source E (Ensemble de départ) et de but F (Ensemble d'arrivée) toute correspondance de $E \ vers \ F$ telle qu'a tout élément de E soit associé à un élément unique de F.

On écrira :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

De plus si $x \in E$ et $y \in F$ tels que : $f(x) = y$, alors y est appelé l'image de x par f , et x est appelé un antécédent de y par f.

Remarque :

Toute fonction numérique d'une variable réelle est une application de son domaine de définition vers $\mathbb{R}$.

2. Exemples d'applications

- Application identique de E ou identité de E

$$id_E \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

- Application constante

  S'il existe $k \in F$ tel que :$\forall x \in E: f(x) = k$ alors l'application

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & k \end{array}$$

  Est appelée application constante de $E\ vers\ F\ de\ valeur\ k.$

3. Egalité de 2 applications

Définition :

Deux applications :

f de source $E\ et\ de\ but\ F$, et g de source $E'\ et\ de\ but\ F'$ sont égales si et seulement si $E = E'$, $F = F'\ et\ \forall x \in E = E': f(x) = g(x)$

4. Restriction et prolongement d'une application

Définitions :

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble $F\ et\ G$ une partie non vide de E

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

La restriction de f à G est l'application g telle que :

$$g \quad : \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & g(x) = f(x) \end{array}$$

et est notée $g = f_{|G}$ et f est un prolongement de g à E.

II. Image directe et image indirecte

1. Définitions :

Soient f une application de $E\ vers\ F$, A est une partie de E, et B est une partie de F.

- L'image directe de A notée $f\ (A)$ est donnée par :

$$f\ (A)\ =\ \{f(x)\ \ /x\ \in\ A\}$$
$$\forall y \in F: y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A: f(x) = y)$$

- L'image réciproque de B notée $f^{-1}\ (B)$ est donnée par :

$$f^{-1}\ (B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$$
$$\forall x \in E: x \in f^{-1}\ (B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit l'application :

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = 3 - x^2 \end{array}$$

On pose $A = \{-1; 1; 0; 2; -2; 3\}$, $B = \{4; 0; 2\}$

Déterminer en extension : $f(A), f^{-1}\ (B), f^{-1}\ (\{4\})\ et\ f^{-1}\ (\{-1\})$

Exercice 2 :

Soit l'application :

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = x - x^2 \end{array}$$

Déterminer : $f\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right), f^{-1}\ ([-2; 0])$

2. Propriété :

Soit une application $f: E\ \rightarrow\ F$.

Pour toutes les parties $A\ et\ B\ de\ E$, on a : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

III. Injection, surjection et bijection

1. Définitions :

Soit $f: E \rightarrow F$ une application.

- On dit que f est injective si tout élément y de F possède au plus un antécédent x. C.à.d. :

$$\forall (x, x') \in E^2 : f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

- On dit que f est surjective si tout tout élément y de F possède au moins un antécédent x C.à.d. :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

- On dit que f est bijective si tout élément y de F tout possède exactement un antécédent x. C.à.d. :

$$\forall y \in F, \exists!\, x \in E : y = f(x)$$

Exercice d'application :

Justifier l'affirmation suivante :

L'application :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

n'est ni injective, ni surjective et ni bijective.

2. Propriétés :

Soit $f: E \rightarrow F$ une application. On a :

- (f est injective) $\Leftrightarrow$ ($\forall (x, x') \in E^2 : x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$)
  (Par contraposée)
- (f est surjective) $\Leftrightarrow$ $f(E) = F$

- (f est bijective) $\Leftrightarrow$ (f est injective et surjective)

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit l'application :

$$f \quad : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 - 2|x| \end{array}$$

1) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{-2\})$

2) Déduire de 1) si f est :

a. Injective ou non ?
b. Surjective ou non ?

3) f est-elle bijective ?

Exercice 2 :

Soit l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} [1;2] & \longrightarrow & [2,3] \\ x & \longmapsto & f(x) = 1 + \dfrac{2}{x} \end{array}$$

1) Montrer que f est injective.

2) Montrer que f est surjective.

3. Bijection réciproque :

Propriété et définition :

Soit une bijection $f: E \rightarrow F$.

- L'application notée f^{-1} définie de F *vers* E, associant à tout élément x *de* F l'unique élément y *de* E tel que $f(y) = x$, est une bijection.
- L'application $f^{-1}: F \rightarrow E$, ainsi définie est appelée l'application réciproque de f et on a pour tout $x \in F$ et $y \in E$:

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Exercice d'application :

Montrer que l'application :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} [-1;+\infty[& \longrightarrow &]-\infty,3] \\ x & \longmapsto & f(x) = 1 - 2x \end{array}$$

est une bijection et définir sa bijection réciproque.

IV. Composition de 2 applications

Activité :

Soient les applications :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 4x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \frac{x+1}{2} \end{array}$$

Vérifier que pour tout réel x on a :

$$f(g(x) = (x+1)^2 \,, g\big(f(x)\big) = 2x^2 + \frac{1}{2} \ \ et \ g\big(g(x)\big) = \frac{x+3}{4}$$

A-t-on pour tout réel x : $f(g(x) = g\big(f(x)\big)$?

1. Définition :

Soient 2 applications $f: E \ \rightarrow \ F$ et $g: G \ \rightarrow \ H$.

Si $f(E) \subset G$, alors on définit l'application notée $gof \ : E \ \rightarrow H$ et tel que :

$$\forall x \in E: gof(x) = g(f(x))$$

Cette application est appelée la composée de $f \ suivie \ de \ g$.

Remarques :

- Si gof et fog existent, alors généralement $gof \neq fog$
- Et on a : $(fog)oh = fo(goh)$

2. Propriétés :

Soit une bijection $f : E \rightarrow F$ et $f^{-1} : F \rightarrow E$ sa réciproque. On a :

$$f^{-1} o f = id_E \text{ et } f o f^{-1} = id_F$$

Preuve :

Soient $x \in E$ et $y \in F$ tels que : $f(x) = y$ donc $f^{-1}(y) = x$

On a :

$$f^{-1} o f(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x \text{ , donc } f^{-1} o f = id_E$$

$$f o f^{-1}(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = f(x) = y \text{ , donc } f o f^{-1} = id_F$$

3. Propriétés :

- La composée de 2 applications injectives est injective.
- La composée de 2 applications surjectives est surjective.
- La composée de 2 bijections est une bijection.