Généralités sur les ensembles

Niveau : 1ère Sciences mathématiques

Activités :

1) On considère les ensembles suivants définis en compréhension :

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} / \frac{12}{n+5} \in \mathbb{N}\right\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / |x^2 - x| \leq 2\}$$

Donner la liste écrite entre « { } » de tous les éléments de chaque ensemble.

2) Donner une propriété caractérisant les éléments des ensembles suivants :

$$C = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; \dots\}$$

$$D = \{1; 2; 3; 6; 12\}$$

I. Définitions et représentations d'un ensemble

a. Définition :

- Un **ensemble** désigne un rassemblement d'objets distincts.
- Si *x* est un élément d'un ensemble *A,* on dit que x appartient à A et on note :$x \in A$
- Un ensemble peut être défini :
  - **en extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades,
  - ou **en compréhension** c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments
- Un diagramme de Venn d'un ensemble est une ligne fermée où l'on représente à l'intérieur les éléments de cet ensemble.

Exemple :

Soit l'ensemble

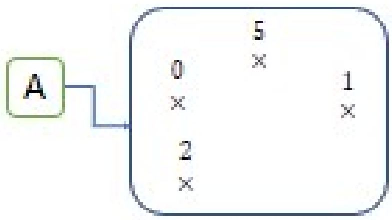
$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N} \right\}$$

Ecriture en extension :

On a : $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$; donc $\frac{n+2}{n+1} \in \mathbb{N} \iff \frac{6}{n+1} \in \mathbb{N} \iff n+1 \; divise \; 6 \iff n+1 \in \{1; 2; 3; 6\} \iff n \in \{0; 1; 2; 5\}$

D'où $A = \{0; 1; 2; 5\}$

Diagramme de Venn



II. Inclusion, égalité

a. Définition :

- Un ensemble A est un *sous-ensemble d'un ensemble* B signifie que tous les éléments de A sont des éléments de B.
  On dit aussi que « B est une *partie* de A », ou « B est inclus dans A » ou « B est contenu dans A ». On traduit cela par le symbole : « $\subset$ »

$$A \subset B \iff (\forall x \in A, x \in B)$$

- Deux ensembles A et B sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments et on note $A = B$

b. Propriétés :

Soient $A, B\ et\ C$ trois ensembles. On a :

- $A = B \iff (\ A \subset B\ et\ B \subset A\ )$
- $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C$
- $A \subset A\ et\ \emptyset \subset A$

Remarques :

$$A \not\subset B \iff (\exists x \in A\ ; x \notin B)$$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 1\}$ et $B = \{(2t + 3, 2t + 2) / t \in \mathbb{R}\}$

Montrer que $A = B$

Exercice 2 :

On pose : $A = \left\{\frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $B = \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{4} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Montrer que A est strictement inclus dans B.

III. Partie complémentaire

1. Définition :

Soit A une partie d'un ensemble E.

La partie complémentaire de $A\ dans\ E$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note C_E^A ou $\bar{A}$

On a alors :

$$C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$$

$$\forall x \in E : x \in \bar{A} \iff x \notin A$$

Exercice d'application :

Déterminer :

$$C_{\mathbb{R}}^{]-1;2]} \quad ; \quad C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} \quad ; \quad C_{]-2;3[}^{[0;1]} \quad ; \quad C_{[1;5[}^{\{2\}}$$

2. Propriétés :

Pour toutes les parties $A, B \; et \; C$ d'un ensemble E, on a :

$$C_E^{C_E^A} = A$$

$$C_A^A = \emptyset$$

$$A \subset B \iff C_E^B \subset C_E^A$$

Preuve de la propriété : $A \subset B \iff C_E^B \subset C_E^A$

On a :

$$A \subset B \iff (\forall x \in E : x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

$$\iff (\forall x \in E : x \notin B \Longrightarrow x \notin A)$$

$$\iff (\forall x \in E : x \in \bar{B} \Longrightarrow x \in \bar{A})$$

$$\iff \bar{B} \subset \bar{A}$$

IV. Opérations sur les ensembles

1. L'ensemble *𝒫(E)*

Définition :

On note par *𝒫(E)*, l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble *E.*

Exercice d'application :

1) Ecrire *𝒫(E)* en extension dans les cas suivants :

a. $E = \{a\}$ b. $E = \{1; 2; 3\}$ c. $E = \emptyset$

2) Compléter par un symbole convenable :

$\emptyset$ … … *𝒫(E)* ; $\emptyset$ … . . E ; $\{x\}$ … … *𝒫(E) avec* $x \in E$

2. L'intersection et la réunion dans $\mathscr{P}(E)$

a. Définitions

Soient $A \; et \; B$ deux parties d'un ensemble E. On définit :

- L'intersection de $A \; et \; B$ est l'ensemble :

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \; et \; x \in B\}$$

  C'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments communs à $A \; et \; B$

- La réunion de $A \; et \; B$ est l'ensemble :

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \; ou \; x \in B\}$$

  C'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à $A \; ou$ à B

Exercice d'application :

Soient $E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in E / x^2 - 3x + 1 > 0\}$ et $B = \{x \in E / x > 0\}$

Montrer que $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cap B$ et $A \cup B$ sont des intervalles.

b. Propriétés

Soient A , $B \; et \; c$ des parties d'un ensemble E. On a :

- $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$
- $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$. (Idem pour B)
- $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$: La ∪ et l'∩ sont commutatives.
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: La ∪ et l'∩ sont commutatives.
- $A \cap (B \cup C) =(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) =(A \cup B) \cap (A \cup C)$
  On dit que l'intersection (resp.∪) est distributive par rapport à la réunion (resp. ∩)
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$: Lois de Morgan

3. La différence de 2 ensembles :

Définitions :

Soient A et B 2 ensembles. On définit :

- La différence de $A\ et\ B$ est l'ensemble :

$$A - B = \{x \in E / x \in A\ et\ x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

  C'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B

- La différence symétrique de $A\ et\ B$ est l'ensemble :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

Exercice d'application :

Soient $E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in E / x^2 - 3x + 1 > 0\}$ et $B = \{x \in E / x > 0\}$

Montrer que $A - B$ et $B - A$ et $A \Delta B$ sont des intervalles.

4. Produit cartésien de 2 ensembles

Définition :

Le produit cartésien de 2 ensembles $E\ et\ F$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E\ et\ y \in F$. O le note :

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E\ et\ y \in F\}$$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Ecrire les ensembles $E^2 = E \times E\ et\ E \times F$ en extension sachant que :
$E = \{x \in \mathbb{Z} / |x| = 1\}$ et $F = \{x \in \mathbb{N} / |x - 2| \leq 1\}$

Exercice 2 :

On pose : $E = \mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$ et $F = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}^*\ et\ y \in \mathbb{R}^*\}$

1) Prouver que : $E \neq F$

2) A-t-on $E \subset F$ ou $F \subset E$? Justifier votre réponse.