Ensembles des nombres

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Activités :

1) Résoudre chaque équation et, pour chaque solution, indiquer s'il s'agit d'un entier positif ou négatif, d'un décimal, d'un rationnel ou d'un irrationnel :

1. $x + 5 = 11$
2. $x + 10 = 1$
3. $100x = 3$
4. $3x = 2$
5. $x^2 = 2$

2) Écrire le nombre ci-dessous sous la forme 2^n , $(n \in \mathbb{Z})$:

$$A = \frac{2^{20}}{2^{-5} \times (2^6)^8} \times \left(\frac{2^{-8}}{2^6}\right)^{10} \times \frac{1}{2^{-10}}$$

3) Les nombres $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ sont-ils égaux ?

I. Ecritures et notations

1. L'ensembles des nombres entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; \dots\}$$

2. L'ensembles des entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$$

Et on a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \; et \; \mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$$

3. L'ensembles des nombres décimaux :

$$\mathbb{D}=\left\{\frac{a}{10^n}/a \in \mathbb{Z}\ et\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

Et on a :

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$$

Exercice d'application :

Dire pourquoi les nombres :

$$\frac{7}{100};\frac{2}{5};\frac{57}{200};\frac{17}{20};\frac{3}{8}$$

sont des éléments de $\mathbb{D}$.

4. L'ensembles des nombres rationnels :

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/a \in \mathbb{Z}\ et\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Et on a : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Exercice d'application :

Dire pourquoi les nombres :

$$\frac{1}{3};\frac{2}{7};\frac{5}{11}$$

sont des éléments de $\mathbb{Q}$ et pas des éléments de $\mathbb{D}$.

5. L'ensembles des nombres réels :

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Et on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

On notera :

- $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls
- $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs
- $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des réels négatifs

Exercice d'application :

Dire pourquoi les nombres :

$$\pi\ ;\ \sqrt{2}\ ;\sqrt{3}$$

sont éléments de $\mathbb{R}$ et non de $\mathbb{Q}$.

II. Propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$

1. Développement et factorisation

Propriété :

Pour tous les réels $x, y\ et\ z$ on a :

Développement $\longrightarrow$

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$$

$$(y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x)$$

$\longleftarrow$ Factorisation

2. Identités remarquables

Propriétés :

Pour tous les réels $a\ et\ b$ on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Remarque :

On a aussi :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exercice 1 :

En utilisant 2 méthodes différentes vérifier que l'on a :

1) $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

2) $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

3) $x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$

4) $27x^3 - 1 = (3x-1)(9x^2+3x+1)$

Exercice 2 :

En utilisant 2 méthodes différentes vérifier que l'on a :

$$\left(27 + 3\sqrt{5}\right)^3 + \left(27 - 3\sqrt{5}\right)^3 = 36^3$$

III. Puissances (Rappels)

1. Définition :

Soient a un nombre réel non nul et n un entier naturel tel que : $n \geq 2$

On définit :

- $a^0 = 1$; $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ fois}$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Remarque :

Pour tout entier naturel n non nul on a : $0^n = 0$

L'écriture 0^0 est non définie !

2.Propriétés :

Pour tous les nombres réels a et b non nuls et pour tous les entiers relatifs m et n on a :

$a^m \times a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^n b^n$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3. Puissances de 10

Pour tout entier naturel n non nul on a :

$$10^n = 1\,\underbrace{00\ldots0}_{n\ zéros}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0{,}0\ldots0}_{n\ zéros}\,1$$

4. Ecriture scientifique :

Tout nombre décimal positif s'écrit sous la forme :

$$a \times 10^n$$

Avec a est un nombre décimal tel que : $1 \leq a < 10$, et n est un entier relatif.

Exercices d'application :

Exercice :1

Simplifier le plus possible les nombres suivants :

$A = 3^{2000} + 2 \times 3^{1000} + 1$

$B = 2^{100} - 2^{51} + 1$

$C = 10 \times 3^{98} - 3^{100}$

Exercice 2 :

On pose : $N = 4^{32} \times 5^{71}$

1) Ecrire le nombre N sous la forme scientifique.

2) En déduire le nombre de chiffres du nombre N

Exercice 3 :

Soit x un entier naturel vérifiant :

$$3^{x-1} + 3^{x+1} = 810$$

1) Ecrire le nombre 810 sous la forme $3^a \times 10$, où $a \in \mathbb{N}$

2) Ecrire le nombre $3^{x-1} + 3^{x+1}$ sous la forme $3^b \times 10$, où $b \in \mathbb{N}$.

3) En déduire la valeur de x

Exercice 4 :

Soit x un entier naturel. Montrer que :

$$\frac{(8^{x+3} - 8^{x+2})^2}{(4^{x+2} - 4^x)^3} = 3 \times \frac{2^{12}}{5^3}$$