Equations, inéquations et systèmes

Activités et rappels :

Activité 1 :(Rappels)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1) $\frac{x-1}{4}-\frac{3}{2}=\frac{2x-1}{6}+2$
2) $\frac{x}{5}-2<\frac{3x-2}{4}$
3) $x^2-1\geq\frac{x+1}{4}$
4) $\frac{5x+2}{1-3x}\leq 0$

Activité 2 : (Rappels)

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en utilisant 2 méthodes différentes les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 5x-3y=-1 \\ x+2y=5 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y+4=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$

Activité 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2=4$
2) $x^2-x=0$
3) $4x^2-9=0$
4) $3x^2=6x$
5) $(2x+1)^2+1=0$
6) $4x^2-4x+1=0$

Activité 4 :

Ecrire les trinômes suivants sous la forme : $a(x-\alpha)^2+\beta$

1) x^2+2x+5
2) $2x^2+6x-9$
3) $2x^2-3x+1$

Activité 5 :

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$

Montrer que : $P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

I. Equations et inéquations du second degré à une inconnue :

1. Forme canonique d'un trinôme du 2ème degré :

Propriété et définition :

Soient a non nul, b et c trois réels, et on considère le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$.

On a : $P(x)=\ a(x-\alpha)^2+\beta$, où : $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$

Cette forme de $P(x)$ est appelée la forme canonique du trinôme $P(x)$

Le nombre noté $\Delta=b^2-4ac$ est appelé discriminant du trinôme $P(x)$

2. Equation : $ax^2+bx+c=0$

Activité :

On pose $P(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$

On a déjà montré que : $P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

1) Si $\Delta=0$, montrer que $P(x)$ admet une seule racine.

2) Montrer que si $b^2-4ac\geq 0$, alors $P(x)$ s'écrit sous la forme : $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ et préciser x_1 et x_2 puis calculer x_1+x_2 et x_1x_2

3) Que peut-on dire des zéros de $P(x)$ si $\Delta<0$?

a. Propriété :

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$; alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$; alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$; et on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta > 0$; alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; et on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exercices d'application :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $10x^2 - 3x - 4 = 0$
b. $3x^2 - 2x + 11 = 0$
c. $9x^2 - 42x + 49 = 0$
d. $x^2 - 21x + 54 = 0$
e. $3x^2 - 17x + 4 = 0$

2) Factoriser les trinômes :

$$10x^2 - 3x - 4 \,;\, 9x^2 - 42x + 49 \,;\, x^2 - 21x + 54$$

3) Montrer que l'équation $2023x^2 + 2022x - 2024 = 0$ admet deux solutions distinctes α et β sans les déterminer et calcul de discriminant, puis calculer $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, $\alpha^2 + \beta^2$ et $\alpha^3 + \beta^3$

4) Trouver 2 nombres réels a et b sachant que leur somme est 1 et leur produit est -1.

Remarque :

Si a et b sont 2 nombres tels que : $a + b = S$ et $ab = P$, alors a et b sont les solutions de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$, s'ils existent.

4. Signe d'un trinôme :

Activité :

1) Résoudre les équations suivantes :

$$2x^2 - 4x + 7 = 0 \quad ; \quad -2x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 \quad ; \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

2) Ecrire le trinôme $2x^2 - 4x + 7$ sous la forme canonique, en déduire son signe sur $\mathbb{R}$.

3) Factoriser les trinômes $-2x^2 + 2\sqrt{2}x - 1$ et $2x^2 - 3x - 2$, en déduire leurs signes sur $\mathbb{R}$ selon les valeurs de x.

Propriété :

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c\,, a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$; alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ prend le signe de a sur $\mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0$; alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ prend le signe de a sur $\mathbb{R} - \{x_0\}$, x_0 étant sa seule racine.
- Si $\Delta > 0$; alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ prend le signe de a à l'extérieur de ses 2 racines et prend le signe contraire de a entre les 2 racines.

Exercices d'application :

1) Dresser sur $\mathbb{R}$ les tableaux de signe des trinômes suivants :

$$x^2 - 4x \,;\, 7x^2 - 5x + 4 \,;\, 66x^2 + 17x + 1 \,;$$
$$-8x^2 + 29x - 15 \,;\, -x^2 + 2x - 1$$

2) En déduire l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $-8x^2 + 29x - 15 \leq 0$
2. $\frac{66x^2+17x+1}{7x^2-5x+4} \geq 0$
3. $\frac{-x^2+2x-1}{x^2-4x} < 0$

II. Equations du 1er degré à 2 inconnues :

Activité 1 :

Soit dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E): $2x-3y+5=0$

1) Calculer $x_0\ et\ y_0$ sachant que les couples $(x;2)$ et $(0;y_0)$ sont des solutions de (E)

2) Soit (x,y) une solution de (E). Calculer x en fonction de y et y en fonction de x en déduire 2 formes de l'ensemble solution de (E).

3) Interpréter ce qui précède géométriquement.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $2x-\sqrt{2}y=2\sqrt{2}$

Activité 2 :

Soient des réels $a, a', b, b', c\ et\ c'$ tels que :

$(a,b)\neq(0{,}0)$ et $(a',b')\neq(0{,}0)$

Soit le système d'inconnue le couple (x,y) dans $\mathbb{R}^2$:

$$(E):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

1) En utilisant la méthode des combinaisons linéaires montrer que (E) est équivalent à $(E'):\begin{cases}(ab'-a'b)x=a'c-ac' \\ (ab'-a'b)y=b'c-bc'\end{cases}$

2) Discuter les solutions de (E)

1. Méthode des déterminants :

a. Définition :

On appelle déterminant de 2 couples de nombres réels $(a,b)\ et\ (c,d)$ le nombre $ad-bc$ noté :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-5\times(-1)=-6+5=-1$$

b. Définition et propriété :

Soit le système d'inconnue le couple (x, y) dans $\mathbb{R}^2$:

$$(E): \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

tel que : $(a, b) \neq (0,0)$ et $(a', b') \neq (0,0)$

Le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est appelé le déterminant principal de ce système.

Ce système a une solution unique (x_0, y_0) si et seulement si $\Delta \neq 0$

et on a : $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ avec : $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

Si $\Delta = 0$, alors ce système n'a pas de solution *ou bien*, en a une infinité.

c. Interprétation géométrique

Résoudre un tel système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, c'est déterminer la position relative des 2 droites :

$$(D): ax + by = c \text{ et } (D'): a'x + b'y = c' :$$

Si $\Delta \neq 0$ alors $(D) et (D')$ sont sécantes en un point $A(x_0, y_0)$, sinon $\Delta = 0$, alors $(D) et (D')$ sont soit confondues soit strictement parallèles.

Exercices d'application :

En utilisant la méthode des déterminants, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 5x - 3y - 1 = 0 \\ 2x + y + 4 = 0 \end{cases}$
2) $\begin{cases} 5x - 3y - 1 = 0 \\ 2x + y + 4 = 0 \end{cases}$
3) $\begin{cases} 3x + 4y - 11 = 0 \\ 7x + 9y - 2 = 0 \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$
5) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$

2. Régionnement du plan :

On considère que le plan est muni d'un repère cartésien.

Activités :

On considère la droite $(D): 2x + 3y - 6 = 0$

1) Vérifier que $A(3;0)$ *et* $B(0;2)$ sont 2 points de (D) et construire (D)

2) Placer dans le même plan les points :

$$E(1;1), F(4;-3)\ ;\ G(-2;6); M(-2;2)\ et\ N(6;-1)$$

Et préciser le signe de l'expression $2x + 3y - 6$ pour chaque point. Que remarquez-vous ?

Propriété :

Soit dans le plan la droite $(D): ax + by + c = 0$.

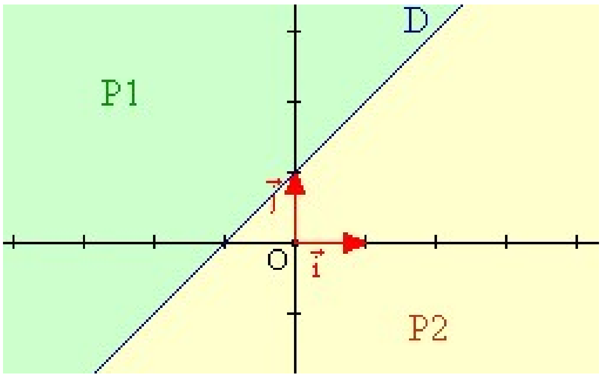
La droite (D) partage le plan en 2 demi-plans (fermés ou ouverts) :

L'un deux est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$ax + by + c$ est positive ($\geq 0\ ou > 0$)

L'autre est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$ax + by + c$ est négative ($\leq 0\ ou < 0$)



Exercice :

1) Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} 2x + y - 3 \geq 0 \\ x - 4y + 3 \leq 0 \end{cases}$$

2) En déduire la valeur minimale de l'expression $x + 2y$ sachant que (x, y) est une solution du système.

III. Programmation linéaire : (En exercice)

Problème :

Un confiseur vend des sachets de deux sortes contenant un assortiment de caramels mous et de caramels durs.

Les sachets du premier type contiennent 10 caramels mous et 10 caramels durs. Le sachet est vendu 20 Dh.

Les sachets du second type contiennent 15 caramels mous et 5 caramels durs. Le sachet est vendu 25 Dh.

Le confiseur dispose de 320 caramels mous et de 160 caramels durs.

Combien de sachets de chaque sorte doit-il préparer de façon à tirer le meilleur profit de la vente de tous les sachets?

Répondre aux questions suivantes :

Soient x et y les nombres de sachets vendus par jour respectivement du type « mou » et « dur » et b le profit quotidien.

1) Montrer que :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 1{,}5y \leq 32 \\ 2x + y \leq 32 \end{cases} \quad et \quad b = 20x + 25y$$

2) Prendre 1 cm pour 4 unités sur chacun des axes d'un repère orthonormé puis représenter dans le 1er quadrant du repère ($x \geq 0$ et $y \geq 0$) les 2 droites:

$$(D): x + 1{,}5y = 32 \; et \; (D'): 2x + y = 32$$

(Remarquer que $A(8; 16)$ est un point commun des 2 droites et que (D) passe par $B(14; 12)$ et (D') passe par $C(12; 8)$)

3) On considère la droite $(D_b): 20x + 25y = b$, $b \geq 0$

a) Ecrire l'équation réduite de la droite (D_b) en déduire l'ordonnée y_b à l'origine de cette droite.

b) Tracer la droite (D_{400}) et utiliser une règle pour voir les différentes positions de (D_b), en déduire le point du plan qui détermine le meilleur profit de la vente de tous les sachets.

4) Répondre à la question du problème.