Exercices portant sur

- ***Continuité et limites d'une fonction numérique à variable réelle***
- ***Racines $n^{\text{ièmes}}$ et fonction arctan***

Exercice 1 :

1- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}$ *est prolongeable par continuité en 0.*

2- La fonction $f : x \mapsto \sin x \sin \frac{1}{x}$ *est-elle prolongeable par continuité en 0 ?*

3-Peut-on prolonger la fonction $f : x \mapsto \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}}$ *par continuité à droite en 1 ?*

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+12}-4} & si\ x > 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2+ax+1-a}{x-2} & si\ x < 2 \end{cases} ; f(2) = l$$

Existent t-il des valeurs de a et ℓ pour que f soit continue en 2 ?

Exercice 3 :

Etudier la continuité de la fonction f au point 1 : $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-x-2}{|4x-3|-1} & si\ x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{4} \end{cases}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^3-x-14}{x^2-x-2} & si\ x > 2 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{2x^2+x-12} & si\ x < 2 \end{cases} ; f(2) = l$$

Etudier la continuité de la fonction f au point 2.

Exercice 5:

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{1-2sinxsin3x}{sinx-sin3}\ si\ x\neq\frac{\pi}{4}\ \ et\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Prouver que f est continue au point $\frac{\pi}{4}$.

(Vous pouvez utiliser la méthode du nombre dérivé2 fois)

Exercice 6:

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{(1-x)\sqrt{1+2x}-1}{x^2} & si\ x\geq-\dfrac{1}{2}\ \ et\ x\neq 0 \\ f(0)=-\dfrac{3}{2} & \end{cases}$$

Prouver que : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$, en déduire que f est continue au point 0

Exercice 7:

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^2} & si\ \ x\neq 0 \\ f(0)=0 & \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue au point 0 ?

Exercice 8:

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-x+a}{x-2} & si\ \ x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x+b}{x-3} & si\ \ x\leq 2 \end{cases}$$

1)Discuter suivant les valeurs de a, la limite de f à droite en 2

2)Déterminer a et b pour que f soit continue au point 2

Exercice 9 :

Soit la fonction f *définie par :* $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^2}$

1-Déterminer le domaine D_f *de définition de* f.

2-Vérifier que l'on a :$\forall x\in D_f : f(x)=\frac{2-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$

3-La fonction f *admet-elle un prolongement par continuité* $\tilde{f}$ *au point 0 ? Dans l'affirmative, définir* $\tilde{f}$

Exercice 10:

Montrer que l'équation : $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+cos(\pi x)=0$ *admet au moins une solution c dans* $]0;1[$

Exercice 11 :

Montrer que l'équation : $x^3+x^2=2-3x$ *admet sur* $]0;1[$ *une solution unique* α *et en donner une approximation avec une précision de* 0.25 *en utilisant l'algorithme de dichotomie .*

Exercice 12:

Soit g une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$*et telle que* $f([a;b])\subset[a;b]$.

Montrer que la fonction g admet au moins un point fixe dans l'intervalle $[a;b]$

Exercice 13:

Soit f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=1-x^2+sinx$

1.Déterminer les limites de f *en* $-\infty$ *et en* $+\infty$

2.Montrer que l'équation $f'(x)=0$ *admet dans* $\mathbb{R}$ *une unique solution* α

3.Donner le tableau de variation de f

4.Vérifier que $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$

5.Prouver que $f(\alpha)>0$

6.En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ *dans* $\mathbb{R}$ *et situer les par rapport à* α

Exercice 14:

Soit f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = -3x^3 + 4x + \frac{1}{2}$

1.Etudier les variations de f

2.a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ *admet exactement 3 solutions réelles* $\alpha , \alpha' , \alpha''$ *telles que :* $\alpha < \alpha' < \alpha''$

b. Vérifier que : $\alpha < -1$ *et* $-0.2 < \alpha' < -0.1$ *et* $\alpha'' > 1$

c. Donner le signe de la fonction f *sur* $\mathbb{R}$

3.a. Montrer que f *est bornée sur* $[1; 2]$ *sans l'encadrer.*

b. Montrer que $|f(x)| \leq \frac{31}{2}$ *pour tout* x *de* $[1; 2]$

Exercice 15 :

Soit la fonction numérique de la variable réelle x *:* $f : x \longmapsto -3\sqrt{2x-2} + 1$

1.Donner le sens de variation de f *en utilisant la composée de fonctions et dresser le tableau de variation de* f

2.Montrer que f *est une bijection de* $I = D_f$ *vers un intervalle* J *qu'on déterminera.*

3.Montrer que la bijection réciproque f^{-1} *de* f *est continue sur* J *et dresser son tableau de variation.*

4.Représenter f *et* f^{-1} *graphiquement dans le même repère orthonormé.*

5.Calculer $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$

Exercice 16:

Simplifier le plus possible : $A = \dfrac{\sqrt[4]{9}\sqrt{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[5]{81}\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$ *;* $B = \dfrac{a^{\frac{5}{3}} \times \left(\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}}\right)^3 \times b^{\frac{5}{2}}}{\left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[5]{b^{\frac{-3}{4}}}}$ $(a > 0 , b > 0)$

Exercice 17 :

Ranger les nombres suivants par ordre croissant :

$$\sqrt{13} \ ; \ \sqrt[3]{28} \ ; \ \sqrt[4]{15} \ ; \ \sqrt[12]{100}$$

Exercice18 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation suivante :* $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3-54=0$

Exercice 19 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation suivante :* $\sqrt[3]{8+x^2}-2<x$

Exercice 20 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x}-2}{\sqrt[4]{x}-1}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}+x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}-3x\right)$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{-x^3+5x}+2x\right)$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}-x\right)$

7) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^2-2x^3}+x\right)$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x}-x+\sqrt{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt{x}}$

10) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[5]{(1-x)^2}}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4+x^2}-\sqrt{x+2}}{x-2}$

Exercice 21 :

1) Calculer : $tan(arctan2022)\,,tan\,(arctan2)$

2)Calculer :

$$arctan\,(tan\frac{\pi}{7})\ ,arctan\,(tan\frac{-2\pi}{9})\ ,arctan\,(tan\frac{33\pi}{4})\ ,arctan\,(tan\frac{29\pi}{6})$$

Exercice 22 :

Montrer que :

$$arctan\frac{1}{2}+arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 23 :

Calculer : $arctan\frac{1}{2}+arctan\frac{1}{5}+arctan\frac{1}{8}$

Exercice 24 :

On veut montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}: arctan\,x+arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

En posant $\alpha=arctan\,x$ *et* $\beta=arctan\frac{1}{x}$

1)Calculer $tan\beta$ *et* $tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ *en fonction de* x

2)Vérifier que $\frac{\pi}{2}-\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *et* $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

3)Conclure.

4)En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^{-*}: arctan\,x+arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$

Exercice 25 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

1) $arctan(2x)=-\frac{\pi}{4}$

2) $arctanx^2=-\frac{\pi}{4}$

3) $arctanx+arctan(2x)=\frac{\pi}{3}$

(appliquer la tangente à chaque membre et montrer que $x>0$*)*

4) $arctanx=\frac{\pi}{4}+2\,arctan\frac{1}{4}$

(appliquer la tangente à chaque membre)

Exercice 26 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $arctan(\sqrt{x}-1) \geq \frac{\pi}{6}$

2) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < arctan\left(\frac{x}{2}\right) < 1$

(Dans 1) et 2) vérifier que chaque membre appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *puis appliquer* $\tan$ *à chaque membre)*

Exercice 27 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $X^2 - \frac{\pi}{2}X + \frac{\pi^2}{18} < 0$

2)En déduire les solutions de l'inéquation : $arctan^2 x - \frac{\pi}{2}arctanx + \frac{\pi^2}{18} < 0$

Exercice 28 :

On considère l'inéquation :(E)" $x \in \mathbb{R}$: $arctanx + arctan(2x) \geq \pi/3$ "

Soit x *est une solution de* (E)

1)Montrer que $x > 0$

2)Prouver que $\left(\frac{\pi}{3} - arctanx\right) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

3)Résoudre (E)

Exercice 29 :

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $ab \neq 1$.

On pose : $\alpha = arctan\, a$, $\beta = arctan\, b$ *et* $\gamma = arctan\, \frac{a+b}{1-ab}$

1) Vérifier que : $tan(\alpha+\beta) = tan\,\gamma$ *,en déduire toutes les valeurs possibles de* $\alpha+\beta$ *en fonction de* γ.

2) Trouver un encadrement convenable de $\alpha+\beta-\gamma$ *dans chacun des cas suivants :*

a) $(ab < 1$ *et* $a > 0$ *et* $b > 0)$ *b)* $(ab < 1$ *et* $a < 0$ *et* $b < 0)$

c) $(ab > 1$ *et* $a > 0$ *et* $b > 0)$ *d)* $(ab > 1$ *et* $a < 0$ *et* $b < 0)$

En déduire que : $arctana + arctanb = arctan\frac{a+b}{1-ab} + k\pi$ *où* $k \in \{-1;0;1\}$ *et préciser chaque cas.*

Exercice 30 :

Calculer les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} arctan(x^3-x^2)$$

$$2)\ \lim_{x\to0^-} arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$3)\ \lim_{x\to0}\frac{arctan x^2}{x^4}$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty} x\, arctan\frac{1}{x}$$

$$5)\ \lim_{x\to0} x\, arctan\frac{1}{x}$$

$$6)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x arctan x-\frac{\pi}{2}x\right)$$

Exercice 31 :

1) Etudier la continuité et la monotonie de la fonction $g: x\longmapsto x-\sqrt{x^2-x}$ *sur l'intervalle* $[1,+\infty[$.

2) En déduire la continuité et la monotonie (sans dérivées) de la fonction :

$$f: x\longmapsto tanx-\sqrt{tan^2x-tanx}$$

sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

3.a) Montrer que la fonction f *réalise une bijection de l'intervalle I vers un intervalle* J *à bien déterminer.*

b) Calculer $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in J$.