Fonctions numériques à une variable réelle

Rappels et compléments

Niveau :1ère Sciences Mathématiques

Rappels des prérequis

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f

2) Montrer que f est paire

3) Soit $(a\,, b) \in \mathbb{R}^{+2}$ $tels\ que\ a \neq b$.

a) Montrer que le taux d'accroissement de f entre $a\ et\ b$ est :

$$T = \frac{1 - ab}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$

b) En déduire les variations de f sur les intervalles $[0; 1]$ et $[1, +\infty[$

c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, en déduire les extrémums de f.

I. Comparer, majorer, minorer des fonctions réelles

1.Définitions :

On considère deux fonctions numériques $f\ \ et\ g$ *définies sur un ensemble* $D \subset \mathbb{R}$.

- On dit que f est positive et on note $f \geq 0$ (respectivement négative : $f \leq 0$), si et seulement si $\forall x \in D : f(x) \geq 0$, (respectivement $f(x) \leq 0$)
- $f \leq g$ *signifie que :* $\forall x \in D : f(x) \leq g(x)$

Exercice d'application :

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x - x^2$

1) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq x + 2$

3) Interpréter graphiquement les résultats des questions 1) et 2).

2.Définitions :

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$

- *On dit que f $\boldsymbol{est\ major\acute{e}e\ sur}$ D, s'il existe un réel M tel que* $\forall x \in D : f(x) \leq M$
- *On dit que f $\boldsymbol{est\ minor\acute{e}e\ sur}$ D, s'il existe un réel m tel que* $\forall x \in D : f(x) \geq M$
- *On dit que f $\boldsymbol{est\ born\acute{e}e\ sur\ D}$, si f est à la fois majorée et minorée.*
- *f est donc bornée s'il existe deux réels M $\boldsymbol{et}$ m tels que :* $\forall x \in D : m \leq f(x) \leq M$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1+2x^2}{2+x^2}$

1) Montrer que f est minorée par $\frac{1}{2}$.

2) Montrer que f est minorée par 2.

3) La fonction f est-elle bornée ? Justifier vote réponse.

4) Interpréter graphiquement les résultats des questions précédentes.

Exercice 2 :

Prouver que la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2 + sinx}{1 + x^2}$$

est bornée.

Propriété :

f est bornée sur D $\Leftrightarrow |f|$ *est majorée ; c.à.d.* $(\exists M \in \mathbb{R}^+ ; \forall x \in D : |f(x)| \leq M)$

Exemples :

Les fonctions $x \longmapsto sinx$ et $x \longmapsto cosx$ sont bornées par -1 et 1 en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq sinx \leq 1 \, ; c.\text{à}.d. \, |sinx| \leq 1$$

Et
$$\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq cosx \leq 1 \, ; c.\text{à}.d. \, |cosx| \leq 1$$

Exercice d'application :

1) Montrer par équivalences successives que $\forall x \in \mathbb{R}$: $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2}$

2) ***En déduire*** que la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{xsinx}{1+x^2}$ est bornée.

3. Extrémums d'une fonction numérique

Définitions

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$, et x_0 un élément de D

- On dit que f admet un minimum relatif $f(x_0)$ en x_0, signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que : $\forall x \in I : f(x) \geq f(x_0)$ et on note : $f(x_0) = \min\limits_{x \in I} f(x)$
- On dit que f admet un minimum relatif $f(x_0)$ en x_0, signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que : $\forall x \in I : f(x) \leq f(x_0)$, et on note : $f(x_0) = \max\limits_{x \in I} f(x)$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Prouver que la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 2x - 3$ admet un minimum absolu au point $x_0 = -1$

Exercice 2 :

Soit la fonction $f: x \longmapsto x + \frac{1}{x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Montrer que f est majorée par -2 sur l'intervalle $]-\infty, 0[$

3) Résoudre l'équation $f(x) = -2$

4) Le nombre -2 présente-t-il un maximum relatif pour f ou non ? Justifier vote réponse.

II. Fonction périodique

1.Définition et propriété :

Soit *f* une fonction numérique à variable réelle définie sur D.

On dit que f est périodique s'il existe un réel $\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}: (\, x \in D \iff x + T \in D)$
2. $\forall x \in D: f(x + T) = f(x)$

On dit que T est une période de f et que f est T-périodique.

Et on a : $\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{Z}: x + nT \in D \; et \; f(x + nT) = f(x)$

Exemples :

Les fonctions $x \longmapsto sinx$ et $x \longmapsto cosx$ sont périodiques de période $T = 2\pi$

La fonction $x \longmapsto tanx$ est périodique de période $T = \pi$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Prouver que la fonction $f: x \longmapsto \cos(3x) - 2\sin\,(3x)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 2 :

Soit la fonction $f: x \longmapsto \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Montrer que f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$

2. Périodicité et courbe représentative.

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction T-périodique, il suffit donc de construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire suivant l'axe des abscisses.

Exemples :

Représentations graphiques des fonctions $x \longmapsto sinx$; $x \longmapsto cosx$; $x \longmapsto tanx$

3. Monotonie d'une fonction périodique

Propriété :

Soit f une fonction périodique de période T.

Soit I un intervalle inclus dans $D_f \cap [a, a + T[$ et I_n l'intervalle défini par :

$$I_n = \{x + nT / x \in I\}$$

La fonction f a la même monotonie sur $I\ et\ I_n$.

Exercice d'application :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T = 2$, et définie sur $[0; 2[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 \ \ si\ 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 3 - x \ \ si\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

1) Représenter f graphiquement sur $[0; 2[$ puis sur $[2; 4[$ et sur $[-2; 0[$
2) Calculer $f(x)$ en fonction de x pour tout x de l'intervalle $[9; 10[$
3) Donner les variations de f sur l'intervalle $[99; 100[$

III. Composée de 2 fonctions

Définition :

Étant donné deux fonctions réelles $f\ et\ g$, on définit la composition de $f\ et\ g\ dans\ cet\ ordre$,comme suit :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

La fonction $(g \circ f)$ est appelée la composée de g par f.

On lit cette composée « $g\ rond\ f$ »

Remarque :

Le domaine de définition de $g \circ f$: $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_f \; et \; f(x) \in D_g\}$

<u>Notez bien que :</u>

En général : $f \circ g \neq g \circ f$ c.à.d. que la composition des fonctions n'est pas une opération commutative.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Calculer et simplifier $g \circ f\ (x)$ et $f \circ g\ (x)$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$

2) $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$

3) $f(x) = |x|$ et $g(x) = \frac{x}{x+1}$

Exercice 2 :

On considère les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \; et \quad g(x) = \sqrt{x+1}$$

1) Prouver que : $D_{g\circ f} =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$

2) Calculer $g \circ f\ (x)$ pour tout x de $D_{g\circ f}$

3) Déterminer $D_{f\circ g}$ puis calculer $f \circ g(x)$ pour tout x de $D_{f\circ g}$

4) Donner deux justifications différentes pour montre que $f \circ g \neq g \circ f$

IV. Monotonie des fonctions $\boldsymbol{f+g}$; $\boldsymbol{f+c^{te}}$; $\boldsymbol{\lambda.f}$; $\boldsymbol{gof}$

Activités :

1) Rappeler la monotonie des fonctions :

$x \longmapsto ax + b$,($a \neq 0$) ; $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto \frac{1}{x}$

2) Etudier la monotonie des fonctions : $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto x^3$

1.Propriétés :

Étant donné deux fonctions réelles $f\ et\ g$ définies sur un intervalle I

- Si $f\ et\ g$ ont même monotonie alors $f+g$ est monotone de même monotonie.
- Si f est monotone et g est constante alors $f+g$ est monotone de même monotonie.
- Soit λ un nombre réel non nul :
    - Si $\lambda > 0$, alors $f\ et\ \lambda f$ ont même monotonie
    - Si $\lambda < 0$, alors $f\ et\ \lambda f$ sont de monotonie contraire

Exercices d'application :

En utilisant la monotonie des fonctions usuelles, déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants :
1) $f(x) = 4x^3 + 2x - 3\ ;\ I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x} - 3\ ;\ I = [0; +\infty[$
3) $f(x) = \frac{3}{x} + 1 - x^3\ ;\ I =]0; +\infty[$

2. Variations d'une fonction composée

Théorème

Soit v une fonction monotone sur un intervalle J. Soit u une fonction monotone sur un intervalle I telle que : $\forall x \in I, on\ a\ u(x) \in J$, c.à.d. $u(I) \subset J$

- Si $u\ et\ v$ ont le même sens de variation, alors $v \circ u$ est croissante sur I.

- Si $u\ et\ v$ ont des sens de variation contraires, alors $v \circ u$ est décroissante sur I

Exercice d'application :

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^3 + 1$

1) Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$

2) Prouver algébriquement que $f([0; 1]) = [-1; 1]$

3) En déduire le sens de variation de la fonction $g \circ f$ sur l'intervalle $[0; 1]$

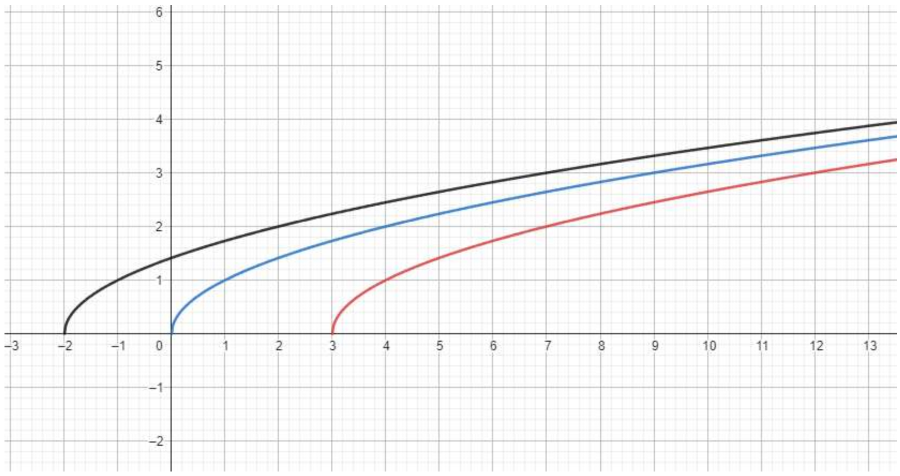
4) Calculer $g \circ f\ (x)$ pour tout $x \in [0; 1]$

V. Représentations graphiques de quelques fonctions :

1. La fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \longmapsto \sqrt{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}}$

La fonction $f: x \longmapsto \sqrt{x+a}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[-a,+\infty[$, sa courbe est une demi- parabole d'origine le point A(-a,0) et de branche infinie de direction l'axe des abscisses.

Graphiques des fonctions $x \longmapsto \sqrt{x+2}$ en noir ; $x \longmapsto \sqrt{x}$ en bleu ; et $x \longmapsto \sqrt{x-3}$ en rouge.

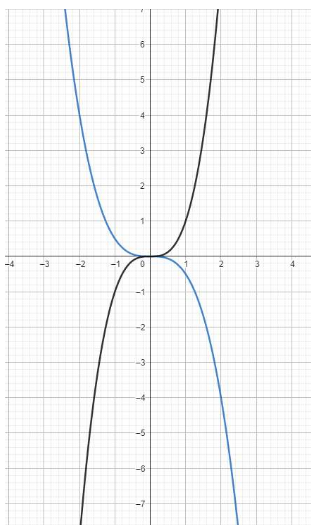


2. La fonction $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{3}$; $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{*}$

La fonction $f: x \longmapsto a x^{3}$ est impaire strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a>0$, et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a<0$.

Sa courbe admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Graphiques des fonctions $x \longmapsto x^{3}$ en noir ; $x \longmapsto -\frac{1}{2} x^{3}$ en .



3. La fonction $\boldsymbol{E}: \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$

Activités :

Pour tout réel x on désigne par $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

1) Déterminer $E(-1{,}5)$, $E\left(-\frac{2}{3}\right), E\left(\frac{3}{4}\right)$, $E(\sqrt{2}), E(\pi), et\ E(100)$

2) Déterminer $E(x)$ pour tout x des intervalles suivants :

$$[-3;-2[, [-2;-1[, [-1;0[, [0;1[\ , [1;2[$$

3) Que peut-on dire de $E(x)$ pour tout x de l'intervalle $[k, k+1[$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$?

a. Définition :

La fonction partie entière est l'application :

$$E \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & E(x) \end{array}$$

Où $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On le note aussi par : $[x]$

b. Propriétés :

Pour $x \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{Z}$, on a :

- $E(x) \in \mathbb{Z}$
- $E(n) = n$
- $E(x) \leq x < E(x) + 1$
- $E(x) = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$
- $E(x + n) = E(x) + n$
- $x - 1 < E(x) \leq x$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Sachant que $E(x) = 1$, montrer que $E(x+1) + E(x-3) + E(x+2) = 3$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$E\left(2x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \; ; \; E\left(\frac{x}{3}\right) = -1 \; ; \; E(x) \geq -2 \; ; \; E(x) < 0$$

Exercice 3 :

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left| xE\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right| \leq |x|$$

(On distinguera 2 cas : $x > 0$, $x < 0$)

c. Représentation graphique :