Géométrie vectorielle du plan (Rappels)

Niveau : Tronc Commun Scientifique

I. Vecteurs du plan

1.Définitions :

- Deux points $A\ et\ B$ de l'espace définis le vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par :

  - Sa direction : la droite (AB)

  - Son sens de $A\ vers\ B$

  - et sa norme : la distance AB

- Le vecteur nul est $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ pour tout point A de l'espace.

- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$, et on écrit :

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

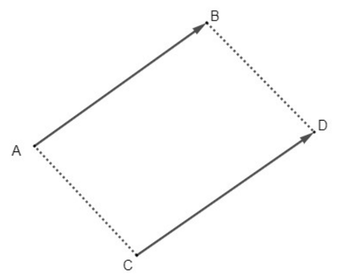
2. Propriété :

Etant donnés un point A et un vecteur$\vec{u}$, il existe un unique point B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

3. Egalité de 2 vecteurs

Propriété :

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.



Remarque :

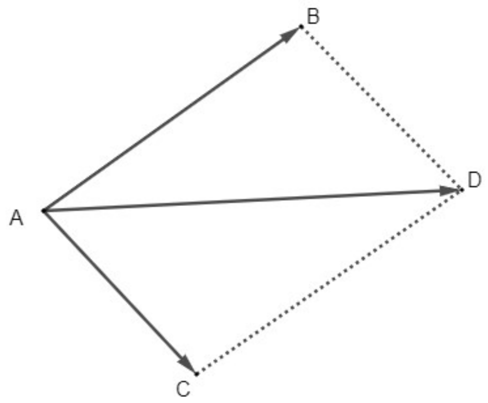
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que la point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

II. Somme de deux vecteurs dans l'espace :

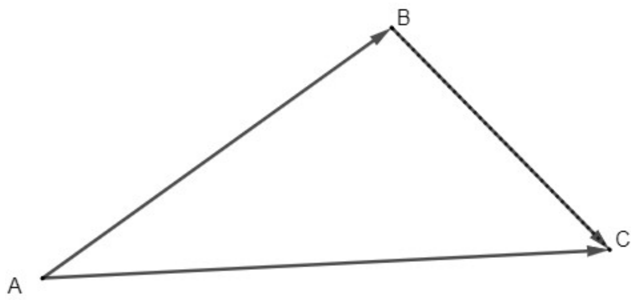
Définition et propriété :

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ est définie par :

- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme.



- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: relation de Chasles



Exercice d'application :

On considère dans le plan 4 points $A, B, C\ et\ D$. Montrer que :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

III. Produit d'un vecteur par un réel

1. Définition :

Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un réel k est un vecteur noté $k\,\vec{u}$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Si $k = 0$, alors $k\,\vec{u} = \vec{0}$, c.à.d. : $0\,\vec{u} = \vec{0}$
- $k\,\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$,
- $k\,\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, ou le sens contraire que $\vec{u}$ si $k < 0$
- La norme de $k\,\vec{u}$ est : $\|k\,\vec{u}\| = |k|.\,\|\vec{u}\|$

Exercice d'application :

Construire un triangle ABC, puis construire les points I , J et K tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\ et\ \overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$$

2. Règles de calcul :

Etant donnés 2 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et 2 réels k, k', on a :

- $k\,\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(k = 0\ ou\ \vec{u} = \vec{0} \right)$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\,\vec{u}$
- $(k + k')\vec{u} = k\,\vec{u} + k'\,\vec{u}$
- $k(\,\vec{u} + \vec{v}) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v}$

Exercice d'application :

Simplifier le vecteur :

$$\vec{V} = \frac{1}{2}(-4\vec{u} + 3\vec{v}) - \frac{1}{4}(2\vec{u} - \vec{v})$$

VI. Colinéarité de 2 vecteurs :

1. Définition :

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires $\vec{u}, \vec{v}$ signifie qu'ils ont la même direction c'est à dire : $\exists k \in \mathbb{R}: \vec{u} = k\vec{v}\ ou\ \vec{v} = k\vec{u}$

2. Alignement de 3 points

Propriété :

Les points $A, B\ et\ C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice d'application :

Soit ABC un triangle et les points $E\ et\ F$ tels que :

$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$

Trouver le nombre réel k tel que $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AF}$, en déduire que les points $A, E\ et\ F$ sont alignés.

3. Parallélisme :

Propriété :

On considère 4 points distincts $A, B, C\ et\ D$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice d'application :

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points $M\ et\ N$ tels que :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{CN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$$

1) Montrer que : $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

2) Calculer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, en déduire que les droites $(MN)\ et\ (AC)$ sont parallèles.

4. Milieu d'un segment :

a. Propriété :

On considère 3 points distincts $A, B\ et\ I$.

Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vraie :

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Exercice d'application :

Soit MNP un triangle.

1) Construire les points $E\ et\ F$ tels que :

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}\ et\ \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$$

2) Prouver que : $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{PF}$. Que peut-on déduire ?

b. Propriété caractéristique du milieu d'un segment :

Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement si pour tout point M du plan on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

Exercice d'application :

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

Quel est l'ensemble des points M du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BD}$?