L'ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$

Activités :

Activité 1 :

Comparer les nombres $a\ et\ b$ dans les cas suivants :

(Sans calculatrice)

1) $a = \frac{2}{7}\ et\ b = \frac{3}{11}$

2) $a = 5\sqrt{3}\ et\ b = 6\sqrt{2}$

3) $a = \frac{5}{\sqrt{3}}\ \ et\ b = \frac{9}{4}$

Activité 2 :

Montrer les inégalités suivantes :

1) $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a\ et\ b$ sont des réels.

2) $\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$, n est un entier naturel.

I. Ordre et opérations

Activités :

Sachant que $\frac{2}{3} > \frac{3}{7}$ et $\frac{5}{8} > \frac{2}{9}$, comparer sans calcul de somme, produit ou inverse :

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{8}$ et $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$

b) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{8}$ et $\frac{3}{7} \times \frac{2}{9}$

c) $\frac{3}{2}$ et $\frac{7}{3}$

1. Définition :

Etant donnés 2 nombres réels a, b on définit :

- $a \leq b$ signifie que $b - a \in \mathbb{R}^{+}$ et on écrit aussi $b - a \geq 0$
- $a < b$ signifie que $b - a \in \mathbb{R}^{+*}$ et on écrit aussi $b - a > 0$

2. Propriétés :

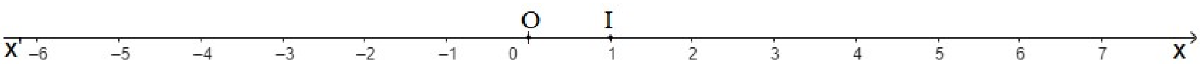
Etant donnés des nombres réels $a, b, c\ et\ d$ on a :

- $a \leq b$ signifie que $a + c \leq b + c$
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$
- Si $c > 0$ alors : $a \leq b$ signifie que $ac \leq bc$
- Si $c \geq 0$ et $a \leq b$ alors $ac \leq bc$
- Si $c < 0$ alors : $a \leq b$ signifie que $ac \geq bc$
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$
- Si $a \leq b \leq 0$ et $c \leq d \leq 0$ alors $ac \geq bd$

II. Valeur absolue

Activités :

Sur l'axe des nombres réels :



Placer les points $A(6), B(2), C(-3), D(-5)$

Calculer les distances :

$$OA, OB, OC, OD, AB, BC, CD$$

1. Définition :

Soit x un nombre réel et M le point d'abscisse x sur un axe des réels $\Delta(O,I)$.

La valeur absolue de x est le nombre réel positif noté $|x|$ égal à la distance OM : $|x| = OM$, et on a :

$$|x| = \begin{vmatrix} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{vmatrix}.$$

Remarques :

Pour tous les réels $x\ et\ y$ on a :

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0$ signifie que $x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x| = |y|$ signifie que $x = y\ ou\ x = -y$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

Exercices d'application :

1) Déterminer :

$\left|\sqrt{3} - 2\right|$; $\left|2 - \sqrt{2}\right|$; $|\pi - 4|$; $\sqrt{(\sqrt{8} - 3)^2}$; $\sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\left|2x - \frac{3}{2}\right| = -1$

b. $\left|2x - \frac{3}{2}\right| = 0$

c. $\left|\frac{x}{2} - 5\right| = \frac{1}{2}$

d. $|3x - 1| = |2 - 5x|$

2. Distance entre 2 nombres réels :

Propriété :

Si $x \; et \; y$ sont des réels et $A \; et \; B$ sont les points d'abscisses $x \; et \; y$ sur un axe réel alors :

$$AB = |y - x| = |x - y|$$

Exercices d'application :

En utilisant une droite réelle résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $|x - 2| = 3$

2. $|x + 1| \leq 2$

3. $|x + 2| \geq 3$

3. Propriétés :

Si $x \; et \; y$ sont des réels, alors :

- $|xy| = |x|.|y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$: inégalité triangulaire
- $|x - y| \geq |x| - |y|$

Exercices d'application :

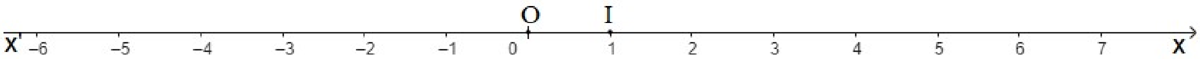
1) Sans développer le produit déterminer $\left|(3 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2)\right|$

2) Sachant que : $|x| \leq \frac{1}{4} \; et \; |y| \leq \frac{3}{4}$, montrer que $|x + y| \leq 1$

III. Intervalles

Activités :

Colorer sur des axes des nombres réels :



1. Le segment représentant l’ensemble des réels compris largement entre $0\ et\ 2$
2. Le segment représentant l’ensemble des réels compris (strictement) entre $-3\ et -1$
3. La demi-droite représentant l’ensemble des réels supérieurs ou égaux à 3
4. La demi-droite représentant l’ensemble des réels inférieurs strictement à -4
5. Le segment représentant l’ensemble des réels dont la valeur absolue est inférieure ou égale à 3
6. Les 2 demi-droites représentant l’ensemble des réels dont la valeur absolue est supérieure ou égale à 2

1. Définitions et notations :

Etant donnés 2 réels $a\ et\ b$ tels que $a < b$, on définit :

- L’intervalle fermé et borné (ou segment) de bornes $a\ et\ b$ est l'ensemble noté $[a, b]$ des nombres réels x vérifiant la double inégalité : $a \leq x \leq b$
- L’intervalle ouvert et borné de bornes $a\ et\ b$ est l'ensemble noté $[a, b]$ des nombres réels x vérifiant la double inégalité : $a \leq x \leq b$
- L’intervalle noté $[a, +\infty[$ est l'ensemble noté $[a, b]$ des nombres réels x vérifiant l’inégalité : $x \geq a$
- L’intervalle noté $]-\infty, a[$ est l'ensemble noté $[a, b]$ des nombres réels x vérifiant l’inégalité : $x < a$
- De même pour les intervalles :$]a, b], [a, b[,]a, +\infty[\ ,]-\infty, a]$
- Le nombre $b - a$ est l'amplitude de l'intervalle $[a\ , b]$.

Exercices d'application :

Trouver l'intervalle ou la réunion d'intervalles auquel appartient le réel x dans les cas suivants :

1) $2 \leq x \leq 10$
2) $-1 < x \leq 2 \; ou \; x > 3$
3) $x \leq 2 \; et \; 0 \leq x < 3$
4) $7 < x < 8 \; et \; 3 \leq x \leq 10$
5) $x \geq 4 \; ou \; 3 < x \leq 5$
6) $8x - 5 > 10x + 1$
7) $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 1 - 3x \geq 0 \end{cases}$

2. Propriétés :

Soit x un nombre réel et r un nombre réel strictement positif. On a :

- $|x| \leq r$ signifie que $-r \leq x \leq r$
- $|x| \geq r$ signifie que $x \geq r \; ou \; x \leq -r$

Exercices d'application :

Trouver l'intervalle ou la réunion d'intervalles auquel appartient le réel x dans les cas suivants :

1. $|x| \leq 1$
2. $\left|\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right| \leq \frac{3}{4}$
3. $|x + 1| > 2$
4. $|3 - 2x| \geq 1$

3. Amplitude, rayon et centre d'un intervalle borné

Définition :

Soit I un intervalle borné de bornes a et $b, a < b$: $[a, b]$ ou $]a, b[, \ldots$

- L'amplitude de I est le nombre positif : $b - a$
- Le rayon de I est le nombre positif : $\frac{b-a}{2}$
- Le centre de I est le nombre : $\frac{a+b}{2}$

Remarque :

L'intervalle ouvert de centre x_0 et de rayon r est : $]x_0 - \mathrm{r}, x_0 + \mathrm{r}[$

Exercice d'application :

1. Déterminer le centre, le rayon et l'amplitude de l'intervalle :$[1; 5]$

2. Soit I l'intervalle ouvert borné de centre -1 et de rayon $\frac{3}{2}$.

Montrer que : $I = \left\{x \in \mathbb{R} / |x + 1| < \frac{3}{2}\right\}$

IV. Encadrements et valeurs approchées :

Activités :

Soient $x \in]1; 2[, y \in]2; 4[$ et $z \in]-2; -1[$

1. Donner des encadrements convenables pour les nombres :

$$x + y \; ; \; -y \; ; x - y \; ; xy \; ; \frac{1}{y} \; ; \frac{x}{y} \; ; \; \frac{1}{z} \; ; \frac{x}{z}$$

2. Montrer que : $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$

3. Montrer que : $3{,}1 < \frac{22}{7} < 3.2$

4. Utiliser une calculatrice pour trouver un encadrement pour le réel x de la forme : $N \times 10^{-n} \leq x < (N+1) \times 10^{-n}$, où $N \in \mathbb{Z}$ dans les cas suivants :

a. $x = \pi$ et $n = 1 \; ou \; n = 2 \; ou \; n = 3$

b. $x = \sqrt{10}$ et $n = 4$

c. $x = \pi - 3$ et $n = 5$

d. $x = -\frac{20}{11}$ et $n = 4$

__1.Définition :__

Réaliser l'encadrement d'un nombre x quelconque, c'est trouver deux nombres $a \; et \; b$ tels que $a \leq x \leq b$.

(Avec égalités ou non)

L'amplitude de l'encadrement est $b - a$

Le nombre a est une valeur approchée par défaut de x, et le nombre b est une valeur approchée par excès de x

__2. Définition :__

Soient $a \; et \; x$ deux nombres réels et $r > 0$.

Dire que a est une valeur approchée de x (ou approximation) à r près (ou à la précision r près) signifie que : $|x - a| < r$

3. Approximation décimale :

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Réaliser une approximation décimale d'un réel x à 10^{-n} près, c'est trouver un entier relatif N vérifiant :

$$N \times 10^{-n} \leq x < (N+1) \times 10^{-n}$$

Le nombre $N \times 10^{-n}$ est appelé approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut.

Le nombre $(N+1) \times 10^{-n}$ est appelé approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès.

Exercice d'application :

Sachant que $1 < x < \frac{16}{9}$, montrer que $\frac{7}{6}$ est une valeur approchée de $\sqrt{x}$ avec une précision inférieure à 2×10^{-1}.