Géométrie dans l'espace

Parallélisme et Orthogonalité

Partie 1 : Parallélisme

Rappels pour la représentation plane des objets de l'espace

- La perspective cavalière ne conserve pas la mesure des segments, et la mesure des angles ; par contre, cette perspective conserve le parallélisme et le milieu ou tout autre division d'un segment.
- Les lignes cachées sont tracées en pointillés
- Les figures situées dans un plan vu de face (appelé plan frontal) sont représentées en vrai grandeur (ou à l'échelle), la forme, les angles et l'orthogonalité sont respectées.

I. Axiomes de la géométrie dans l'espace

- Par deux points distincts de l'espace, passe une droite et une seule
- Par trois points non alignés de l'espace, passe un et un seul plan.
- Un plan peut être déterminé par une droite et un point extérieur à cette droite.
- Si 2 points A et B distincts appartiennent à un plan (P) alors la droite (AB) est incluse dans (P)
- Si 2 plans distincts ont un point commun A, alors ces 2 plans se rencontrent en une droite passant par A.

Remarque :

Un plan peut être aussi défini par deux droites sécantes ou strictement parallèles.

II. Positions relatives de 2 droites dans l'espace :

1. Propriété :

Deux droites distinctes, dans l'espace, peuvent être :

- Coplanaires et Sécantes, si ces deux droites se coupent en un point ou coplanaires et strictement parallèles, si ces deux droites sont coplanaires et n'ont aucun point commun
- Non coplanaires, si ces deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes.

Remarques :

- Deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas nécessairement parallèles.
- Deux droites non coplanaires ne se coupent jamais

2. Propriété :

Si deux droites sont parallèles, alors toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Exercice d'application :

On considère un parallélépipède droit ABCDEFGH tels que I,J et K sont des points appartenant respectivement aux segments [BF], [EF] et [FG] ; et la droite (IJ) coupe (AB) en un point M et la droite (IK) coupe (BC) en un point N.

1. Construire une représentation qui correspond à cette situation.

2. Les droites (JK) et (MN) ont-elles un point commun ?

3. Montrer que les droites (JK) et (MN) sont parallèles.

4. (KJ) et (HG) se coupent en S, (BK) et (CG) se coupent en R.

Montrer que : (RS) // (BJ)

III. Positions relatives d'une droite et un plan dans l'espace :

1. Propriété :

Une droite et un plan peuvent être :

- Parallèles : si la droite et le plan n'ont aucun point commun ou si la droite est contenue dans le plan
- Sécantes : si la droite et le plan ont un seul point commun

2. Propriétés :

- Si une droite *(Δ)* est parallèle à une droite (D) contenue dans un plan *(P)*, alors *(Δ)* est parallèle à *(P)*
- Si une droite *(Δ)* est parallèle à deux plans *(P)* et *(P')* sécants en une droite (D) alors *(Δ)* et (D) sont parallèles.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soient un cube ABCDEFGH, I et J les milieux respectifs de [BE] et [AC]

Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (ACF)

Exercice 2 :

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB], J est le milieu de [AC], K est le milieu de [DC], L est le milieu de [BD].

1. Faire un dessin en perspective cavalière

2. Déterminer le nature du quadrilatère IJKL.

3. a) Déterminer la position relative du plan (IJKL) et de la droite (BC).

   b) Déterminer la position relative du plan (IJKL) et de la droite (AD).

   c) Peut-on conclure que les droites (BC) et (AD) sont parallèles ?

IV. Positions relatives de 2 plans dans l'espace :

1. Propriété :

Deux plans peuvent être :

- Parallèles : si les deux plans n'ont aucun point commun ou si les deux plans sont confondus
- Sécants : si les deux plans ont une droite en commun.

2. Propriétés :

- Si deux plans sont parallèles, alors tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant les coupe suivant des droites parallèles.
- Si un plan *(P)* contient deux droites sécantes *(Δ)* et *(Δ')* parallèles à un plan *(P')*, alors les plans *(P)* et *(P')* sont parallèles
- Théorème du toit : Si deux plans sécants contiennent des droites parallèles, alors leur intersection est parallèle à ces droites

Exercice d'application :

Exercice 1 :

SABCD est une pyramide. *I*, *J* et *K* sont les milieux respectifs de *[SA]*, *[SB]* et *[SC]*.

Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Exercice 2 :

Soit un tétraèdre ABCD. On appelle I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].

Soit H un point du segment [AD] distinct de son milieu.

Les droites (HI) et (DB) se coupent en M, les droites (HJ) et (DC) se coupent en N.

1. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD)

2. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

Partie 2 : Orthogonalité

I. Orthogonalité de 2 droites dans l'espace

1. Définition

Deux droites *(Δ)* et *(Δ')* sont :

- Perpendiculaires si, et seulement si, *(Δ)* et *(Δ')* se coupent perpendiculairement.
- Orthogonales si, et seulement si, il existe une droite (D) parallèle *(Δ)* qui est perpendiculaire à *(Δ')*.
- On écrira pour deux droites perpendiculaires ou orthogonales :

$$(\Delta) \perp (\Delta')$$

2. Propriété :

Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit un cube ABCDEFGH.

Montrer que les droites (AE) et (DC) sont orthogonales.

Exercice 2 :

ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [DG] et J est le milieu de [BG].

Démontre que les droites (IJ) et (AC) sont orthogonales.

II. Orthogonalité d'une droite et un plan dans l'espace

1. Définition

Une droite *(Δ)* est perpendiculaire ou orthogonale à un plan *(P)* si, et seulement si, il existe 2 droites sécantes de *(P)* perpendiculaires à *(Δ)*

2. Propriété :

Une droite *(Δ)* est perpendiculaire à un plan *(P)* si, et seulement si la droite *(Δ)* est orthogonale à 2 droites sécantes incluses dans *(P)*.

Exercice d'application :

ABCDA'B'C'D' est un cube.

1. Démontrer que la droite (AB') est orthogonale au plan (A'BC). En déduire que les droites (AB') et (A'C) sont orthogonales.

2. Démontrer que les droites (AD') et (A'C) sont orthogonales.

3. Démontrer que (A'C) est orthogonale à (AB'D').

III. Orthogonalité de 2 plans dans l'espace

1. Définition :

Deux plans *(P)* et *(P')* sont orthogonaux si toute droite *(Δ)* de *(P)* est orthogonale à toute droite *(Δ')* de *(P)*.

2. Propriété :

Deux plans *(P)* et *(P')* sont orthogonaux si l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.

Remarque : Plan médiateur d'un segment

Le plan médiateur d'un segment *[AB]* est le plan orthogonal à la droite *(AB)* au milieu I de *[AB]*

Exercice d'application :

SABCD est une pyramide régulière de hauteur [SO].

Démontrer que les plans (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.

IV. Relations entre parallélisme et orthogonalité

Propriétés :

- Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.
- Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.
- Si 2 plans sont parallèles, alors toute droite (ou plan) orthogonale ($\not\subset$) à l'un d'eux est orthogonale ($\not\subset$) à l'autre.

Exercice d'application :

Exercice 1 :

ABCDEFGH est un cube.

Démontrer que les plans (ACE) et (DEH) sont perpendiculaires au plan (ABC).

Exercice 2 :

Soit ABCDEFGH un cube. I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. P et Q sont les centres respectifs des faces AEHD et CDHG.

1. Faire une figure.

2. En utilisant le plan médiateur (Π) de [AE], prouver que les droites (IJ) et (PQ) ne sont pas sécantes.

3. Montrer que (ABC) // (Π)

4. Montrer que (SJ) ⊥ (BD)

5.En déduire que les droites (PQ) et (IJ) sont orthogonales « non sécantes ».