Trigonométrie I

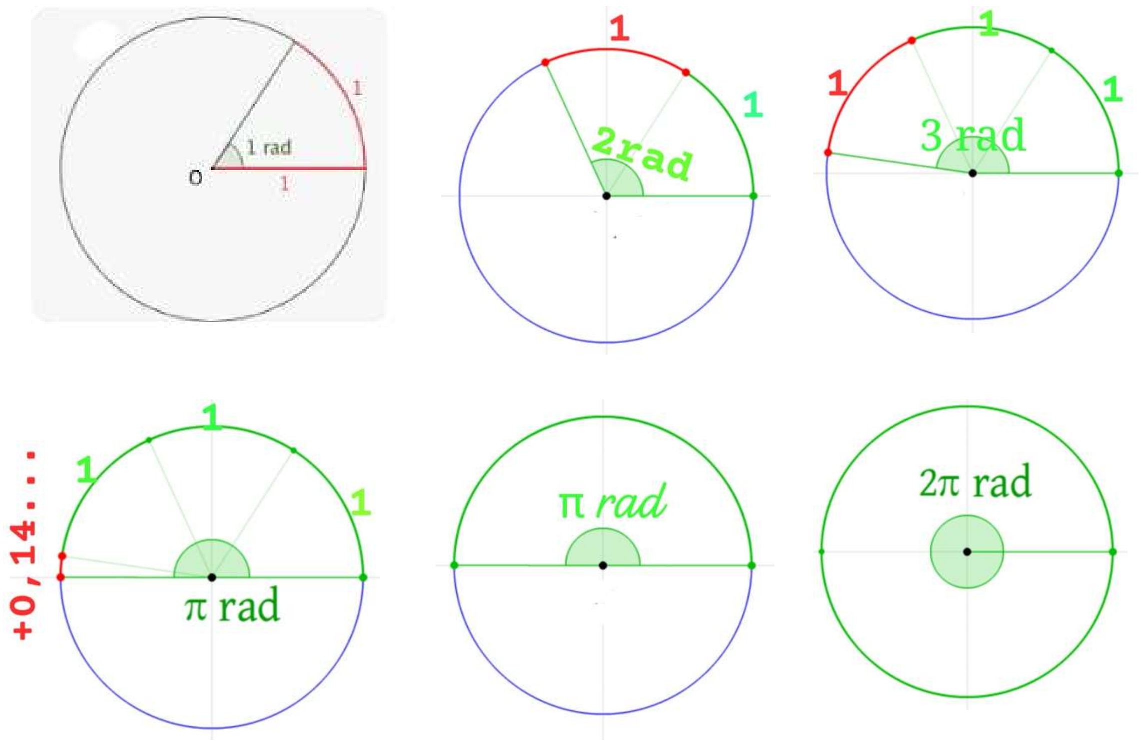
Cercle trigonométrique

Lignes trigonométriques

I. Mesures des arcs et des angles géométriques :

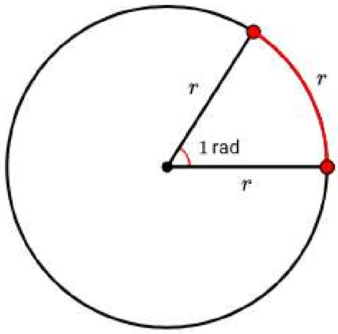
1. Le radian :

Le radian est la mesure de l’angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 dans un cercle de rayon 1.

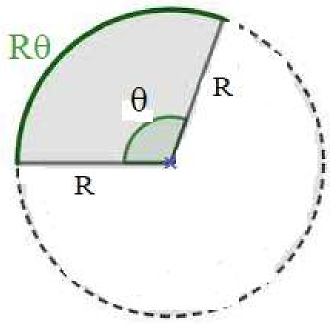


Remarques :

- Un radian vaut ***environ*** 57,3° ou 57° 18' (360°÷2π)
- Un angle ayant son sommet au centre d'un cercle a une mesure d'un radian s'il intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc d'une longueur égale à celle du rayon du cercle.



- La longueur d'un arc intercepté par un angle θ mesuré en radians dans un cercle de rayon R est : $R\theta$.



__Remarque :__

Ne pas confondre entre : *longueur* d'un arc et *mesure* d'un arc !

La mesure d'un arc de cercle est égale à la mesure de l'angle au centre intercepté par cet arc.

2. Relations entre les 3 mesures des angles

__Propriété :__

Si $\alpha, \beta \; et \; \gamma$ désignent les mesures d'un même angle (ou d'un arc) respectivement en radian, degré et le grade, alors :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180} = \frac{\gamma}{200}$$

La mesure en radian d'un angle est proportionnelle à sa mesure en degré.

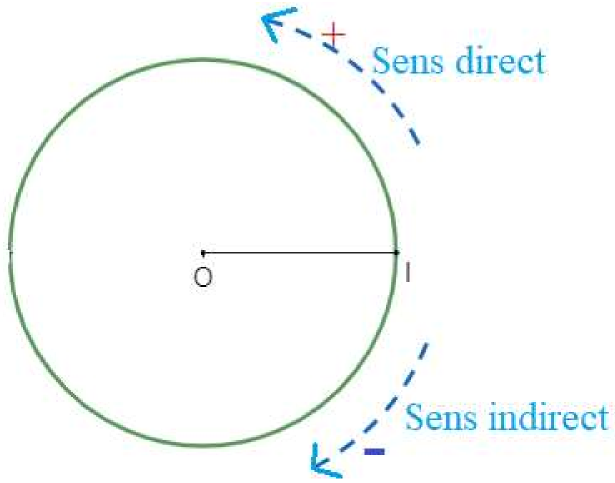
3.Valeurs usuelles :

Mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

II. Sens et cercle trigonométriques-angles orientés :

1. Définition :

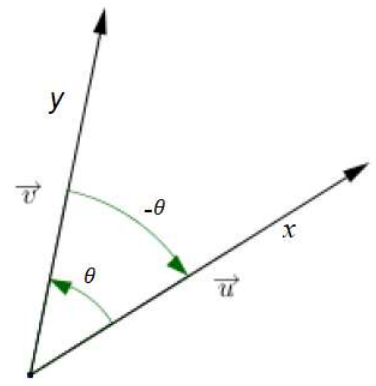
Le cercle trigonométrique de centre O et d'origine un point I est un cercle qui a pour rayon 1 et muni du sens direct : le sens inverse des aiguilles d'une montre.



2. Définition et propriété :

Soient deux demis droites $[Ox)$ et $[Oy)$ de même origine O, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.

- Le couple (Ox, Oy) détermine un angle orienté noté $(\widehat{Ox, Oy})$ ou $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- Si θ est une mesure de $(\widehat{Ox, Oy})$ ou $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, alors les réels $\theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ sont des mesures de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et on note :
$$\overline{(Ox, Oy)} = \overline{(\vec{u},\vec{v})} = \theta + k2\pi$$
- Il existe une seule mesure de l'angle orienté $(\widehat{Ox, Oy})$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Celle-ci est appelée la mesure principale de $(\widehat{Ox, Oy})$ ou de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$



Exercice d'application :

Construire un angle orienté $(\widehat{Ox,Oy})$ dont $\frac{2\pi}{5}$ est une mesure.

Calculer une autre mesure positive et une autre mesure négative de cet angle.

3. Propriétés des angles orientés :

Soient 3 demis droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ de même origine O On a :

- $\overline{(Ox,Ox)} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\overline{(Ox,Oy)} = -\overline{(Oy,Ox)} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\overline{(Ox,Oy)} + \overline{(Oy,Oz)} = \overline{(Ox,Oz)} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$: Relation de Chasles.

Exercice d'application :

Soit un angle $(\widehat{Ox,Oy})$ dont une mesure est : $\frac{34\pi}{6}$

1) Calculer la mesure principale de $(\widehat{Ox,Oy})$.

(Donner 2 méthodes différentes)

2) Sachant que : $\overline{(Ox,Oz)} = -\frac{14\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, calculer la mesure principale de $(\widehat{Oy,Oz})$

III. Abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique :

Dans toute la suite de ce cours, on considère un cercle trigonométrique (U) de centre O et d'origine un point I, et on considère le point J de (U)tel que l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)$ soit un angle droit direct, c.à.d. :

$$\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \, , k \in \mathbb{Z}$$

Le plan sera muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Où $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$

Activité :

Placer sur le cercle (U) les points $A, B, C, D, E, F, G \; et \; H$ tels que :

1. $\overline{(OI, OA)} = \frac{\pi}{3} + k2\pi$
2. $\overline{(OI, OB)} = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$
3. $\overline{(OI, OC)} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$
4. $\overline{(OI, OD)} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$
5. $\overline{(OI, OE)} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$
6. $\overline{(OI, OF)} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
7. $\overline{(OI, OG)} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$
8. $\overline{(OI, OH)} = \frac{3\pi}{5} + k2\pi$

Où $k \in \mathbb{Z}$

Définition :

Soit x un nombre réel.

Si $x \geq 0$, on considère le point M sur le cercle (U) tel que la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ soit égale à x en parcourant le cercle (U) de $I \; vers \; M$ dans le sens direct.

Si $x \leq 0$, on considère le point M sur le cercle (U) tel que la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ soit égale à $-x$ en parcourant le cercle (U) de $I \; vers \; M$ dans le sens indirect.

Les réels $x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle (U).

La mesure principale d'un angle orienté en radian, est l'unique mesure de cet angle dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$

Exercice d'application :

Placer sur le cercle (U) les points d'abscisses curvilignes les nombres suivants :

$$2023\pi \, , 2024\pi \, , \frac{25\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{23\pi}{4} \, , \frac{55\pi}{6} \, , -\frac{29\pi}{6} \, , -\frac{29\pi}{5} \, , \frac{29\pi}{8}$$

Propriété :

Si A et B sont 2 points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes α et β respectivement alors une des mesures de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ ou de l'arc orienté $\widehat{AB}$ est $\beta - \alpha$.

Exercice d'application :

Soient sur le cercle trigonométrique (U) de centre O et d'origine I, les points A et B tels que $\overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})} = \frac{7\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\frac{19\pi}{5}$ est une abscisse curviligne de A.

Trouver l'abscisse curviligne de B.

IV. Rapports trigonométriques d'un nombre réel

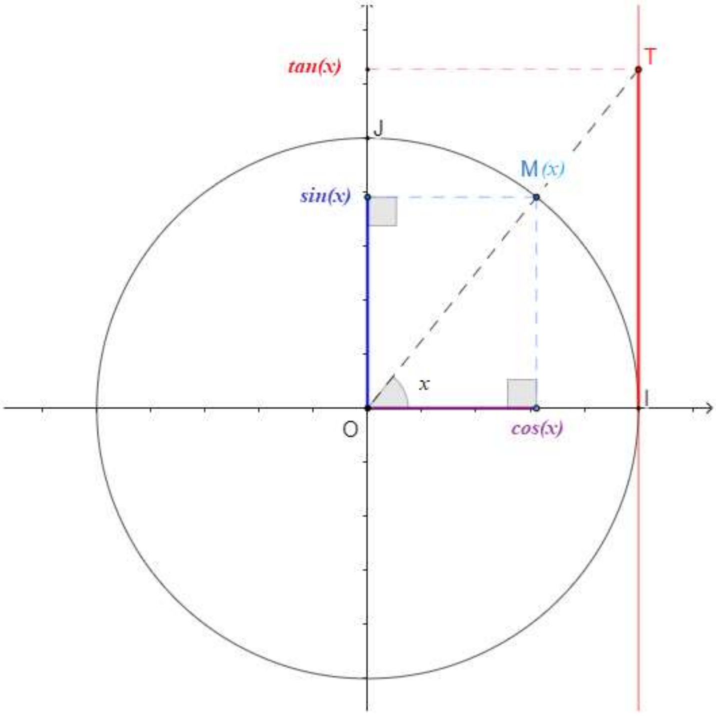
Activité :

Soit M un point de l'arc orienté $\widehat{IJ}$ d'abscisse curviligne principale x.

1. Calculer les coordonnées du point M en fonction de x

2. Soit T le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente au cercle (U) au point I.

Calculer la distance IT en fonction de x



1. Définitions :

Soit x un nombre réel et M un point de (U) d'abscisse curviligne x.

- L'abscisse du point M est notée $\cos(x)$ et appelée le cosinus de x
- L'ordonnée du point M est notée $\sin(x)$ et appelée le sinus de x
- Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, alors l'ordonnée du point T intersection de (OM) avec la tangente à (U) en I est notée $\tan(x)$ et appelée la tangente de x

2. Rapports trigonométriques usuels

Activités :

1) Utiliser le cercle trigonométrique (U) de centre O et d'origine I et déterminer les rapports trigonométriques des réels : $0\,;2\pi\,;\,\frac{\pi}{2}\,;\,\pm\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\,;$ en cas d'existence.

2) Soit E le point de (U) d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{4}$

Montrer que le triangle OIE est rectangle et isocèle, en déduire les rapports trigonométriques de $\frac{\pi}{4}$.

3) Soit F le point de (U) d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{3}$

Montrer que le triangle OIF est équilatéral, en déduire les rapports trigonométriques de $\frac{\pi}{3}$.

4) Idem pour $\frac{\pi}{6}$.

Tableau des valeurs usuelles :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*N'existe pas*

Remarque :

Utilisation de la calculatrice scientifique :

- Choisir l'unité : radian ou degré
- Appuyer et taper $sin(valeur)$ ou $cos(valeur)$ ou $tan(valeur)$ pour voir leurs valeurs
- Pour déterminer une valeur (exacte ou approchée de x, sachant par exemple la valeur y de $cos(x)$:
  - Appuyer sur Shift ou sur 2ème Fn
  - Appuyer sur cos et puis taper y : $cos^{-1}(y)$ puis appuyer sur =

Exercice d'application :

Utiliser une calculatrice scientifique et déterminer :

- $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$
- x sachant que : $a)\ \cos(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $b)\ \sin(x) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $c)\ \tan(x) = 2+\sqrt{3}$

2. Signes de $cos(x), sin(x), tan\,(x)$ sur $]-\pi, \pi]$

x (En radians)	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$tan(x)$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0

3. Relations entre les rapports trigonométriques d'un nombre réel

Propriétés :

Pour tout réel x on a :

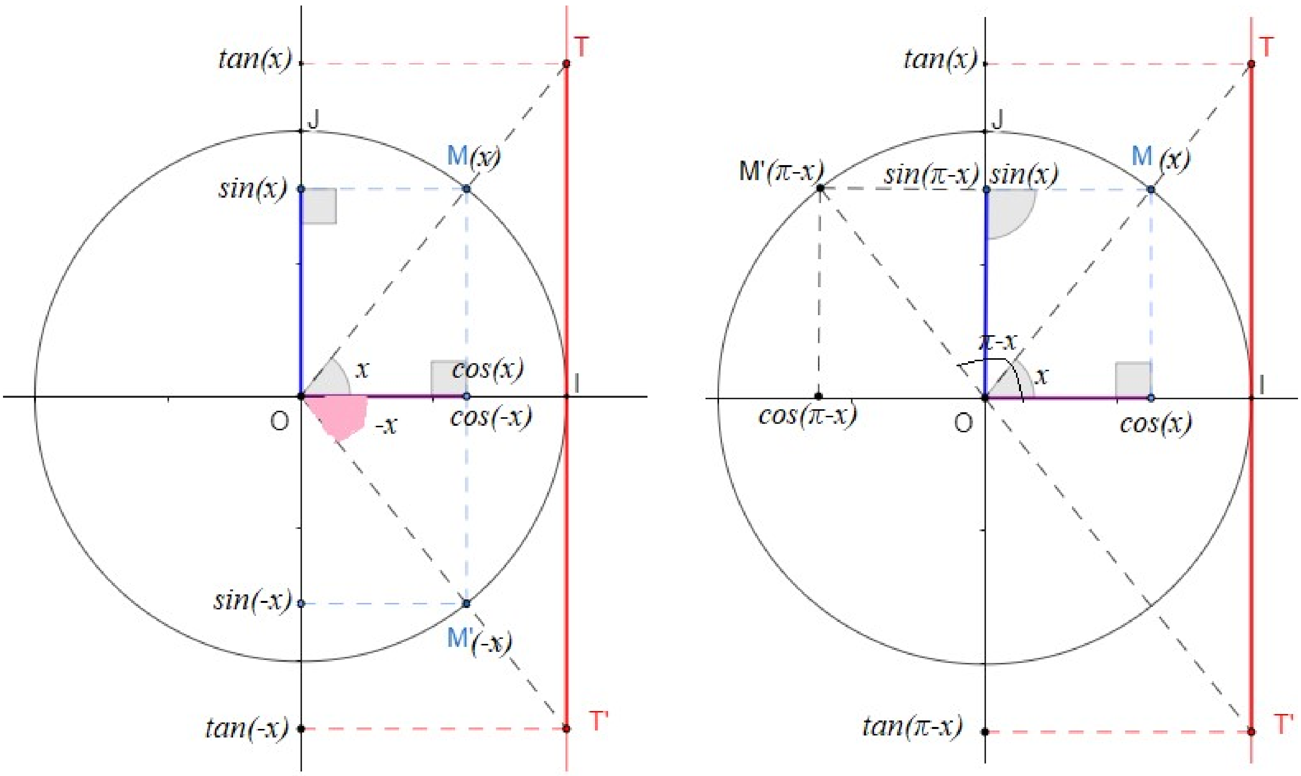
- $|\cos(x)| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq 1$
- $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
- Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $pour\ tout\ k \in \mathbb{Z}$, alors :
  - $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
  - $1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$

Exercices d'application :

1. Sachant que $tan\frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}$, calculer $cos\frac{7\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12}$

2. Sachant que $sin\frac{9\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, calculer $cos\frac{9\pi}{8}$ $et\tan\frac{9\pi}{8}$

4. Relations entre les rapports trigonométriques de x , $\pi \pm x$, $\frac{\pi}{2} \pm x$



Propriétés :

Pour tout réel x on a :

- ❖ $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -sinx$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$ $si\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- ❖ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = sinx$ et $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ $si\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- ❖ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi + x) = -sinx$ et $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ $si\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- ❖ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ $si\ x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- ❖ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cosx$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$ $si\ x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Calculer (Sans calculatrice) :

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $cos\frac{2\pi}{3}$; $sin\frac{2\pi}{3}$; $\tan\frac{2\pi}{3}$

$cos\frac{4\pi}{3}$; $sin\frac{7\pi}{6}$; $\tan\frac{5\pi}{4}$

Exercice 2 :

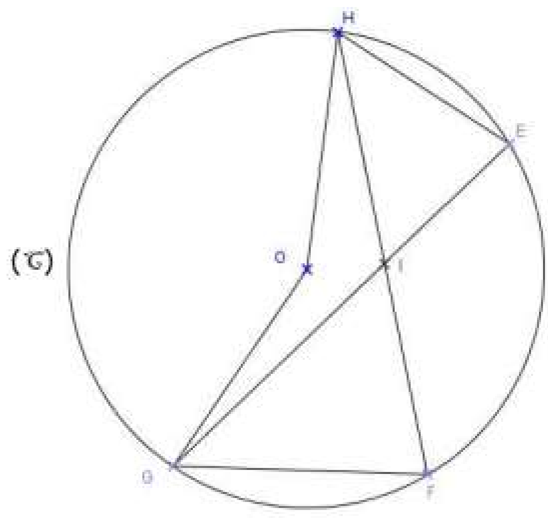
1. Sachant que $cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ calculer $sin\frac{3\pi}{8}$ et $sin\frac{7\pi}{8}$
2. Sachant que $tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ calculer $tan\frac{5\pi}{12}$ et $tan\frac{11}{12}$
3. Sachant que $sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ calculer $sin\frac{\pi}{10}$ et $sin\frac{3\pi}{5}$

V. Quadrilatère cyclique (ou inscriptible)

Rappels des prérequis en exercice :

Sur la figure ci-dessous, les points E, F, G et H sont sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O. Les droites (FH) et (EG) sont sécantes au point I.

On donne : $\widehat{HOG} = 130°$ et $\widehat{EHF} = 40°$



Calculer la mesure de chaque angle du triangle FGI.

Justifier votre réponse.

1. Définition et propriété :

- Un quadrilatère $ABCD$ est cyclique (ou inscriptible) est un quadrilatère dont les sommets se trouvent tous sur un seul et même cercle. Les sommets sont dits *cocycliques*. Le quadrilatère est dit *inscrit* dans le cercle, et le cercle, circonscrit au quadrilatère.
- Un quadrilatère $ABCD$ est cyclique si et seulement si on a :

$$\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = 180° \ ou \ \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$$

Preuve en exercice :

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et cyclique.

1. Montrer que : $\widehat{BCD} = \widehat{DCA} + \widehat{ADB}$ et $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} + \widehat{BDC}$

2. En déduire que : $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180°$ et que $sin\widehat{DAB} = sin\widehat{BCD}$

3. Prouver que si $ABCD$ est non convexe, alors $\widehat{DAB} + \widehat{BCD}$

Exercice d'application :

Soient $(C_1) et \ (C_2)$ deux cercles qui se coupent en deux points $B \ et \ B'$.

Une droite (D) passant par le point B recoupe le cercle (C_1) au point A et le cercle (C_2) au point C.

Une droite (D') passant par le point B' recoupe le cercle (C_1) au point A' et le cercle (C_2)au point C' .

Soit (C_3) un cercle passant par les points $C \ et \ C'$.

(C_3) recoupe la droite (D) au point D et la droite (D') au point D' .

1. Construire une figure convenable.

2. Montrer que : $\widehat{AA'B'} = 180° - \widehat{ABB'}$, $\widehat{ABB'} = \widehat{B'C'C}$ et$\widehat{B'C'C} = \widehat{CDD'}$

3. En déduire que les points $A, A', D \ et \ D'$ sont cocycliques.

Répondre aux 3 questions en envigeant 2 cas :

a. $(D) et \ (D')$ sont parallèles

b. $(D) et \ (D')$ sont sécantes

2. Relations dans un triangle quelconque :

Propriétés :

Soit ABC un triangle. On pose $BC = a, CA = b$ et $AB = c$.

Soient S l'aire du triangle ABC et p son demi périmètre : $2p = a + b + c$, r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC. On a :

- $S = \frac{1}{2} b.c.\sin\hat{A} = \frac{1}{2} c.a.\sin\hat{B} = \frac{1}{2} a.b.\sin\hat{C}$
- $\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c} = \frac{1}{2R} = \frac{2S}{abc}$: loi des sinus.
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$

Exercice d'application :

Soit ABC un triangle tel que : $\widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

1. Montrer que : $\sin\widehat{BAC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ et calculer $\tan\widehat{BAC}$

2. Soit D le projeté orthogonal de B sur (AC) tel que :

$$AD = 1 \text{ et } CD = 4$$

a. En appliquant la loi des sinus dans le triangle ABD, montrer que :

$$BD = \sqrt{2}$$

b. Calculer BC et AB

c. Calculer l'aire du triangle ABC en utilisant 2 méthodes différentes.

d. En appliquant la loi des sinus dans des triangles bien choisis, calculer la valeur de $\sin\widehat{ACB}$ et celle de $\sin\widehat{ABC}$.