Trigonométrie

II Équations et inéquations trigonométriques.

Activités :

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

1. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, déterminer un réel $a \in]-\pi, \pi]$ tel que :

$$\cos(a) = -\frac{1}{2}$$

2. Placer sur un cercle trigonométrique les nombre $-\pi,\ \pi,\ a$ et $-a$, en déduire l'ensemble des solutions de (E).

3. Vérifier que a et $-a$ sont les seules solutions dans $]-\pi, \pi]$.

4. On considère l'inéquation (E') dans $]-\pi, \pi]$: $\cos(x) > -\frac{1}{2}$

Soit x une solution de (E') et M le point d'abscisse curviligne x.

a. Colorer les arcs lesquels appartient M, en déduire l'ensemble des solutions de (E').

b. Dresser le tableau de signes de $\cos(x) + \frac{1}{2}$ dans $]-\pi, \pi]$

Propriétés :

Pour tous les réels $x\ et\ a$, on a :

- $cosx = cosa$ si et seulement si : $\begin{cases} x = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -a + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $sinx = sina$ si et seulement si : $\begin{cases} x = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \pi - a + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alors :

  $tanx = tana$ si et seulement si $x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Remarque :

En pratique pour résoudre $cosx = b$ avec $-1 \leq b \leq 1$, il faudra d'abord trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $cos(a) = b$ pour ensuite appliquer la propriété précédente

Cas particuliers :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- ✓ $cosx = 0$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
- ✓ $sinx = 0$ si et seulement si $x = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
- ✓ $cosx = 1$ si et seulement si $x = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
- ✓ $cosx = -1$ si et seulement si $x = \pi + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
- ✓ $sinx = 1$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
- ✓ $sinx = -1$ si et seulement si $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a. $(E_1)\colon \cos(3x) = -\cos(x)$

   b. $(E_2)\colon sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

   c. $(E_3)\colon \tan(2x) = -1$

2. Trouver les solutions de :

   a. (E_1) dans $]-\pi, \pi]$

   b. (E_2) dans $[0{,}2\pi[$

   c. (E_3) dans $]0, \pi]$

3. Représenter les solutions de chaque équation sur un cercle trigonométrique.

Exercice 2 :

On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = (2\sin x + \sqrt{3})(2\cos x + \sqrt{3})$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): f(x) = 0$. Soit S l'ensemble solution de (E).

2. Montrer que :

$$S \cap]-\pi, \pi] = \left\{\frac{-5\pi}{6}; \frac{-2\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right\}$$

3. Représenter les solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.

4. Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $]-\pi, \pi]$, en déduire l'ensemble solution de l'inéquation :

$$x \in]-\pi, \pi] : f(x) \leq 0$$

Exercice 3 :

On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = \tan x + \sqrt{3}$

1. Pour quelles valeurs réelles de x, l'expression $f(x)$ est-elle définie ?

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $[0; \pi[$

3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$ dans $[0; \pi[$