Version vectorielle du théorème de Thalès

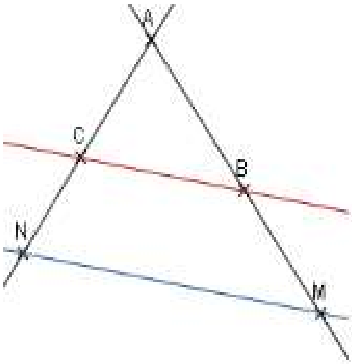
Niveau : Tronc Commun Scientifique

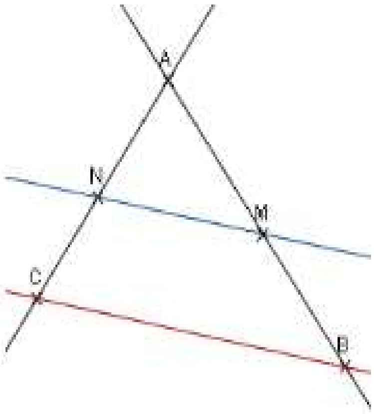
Rappels :

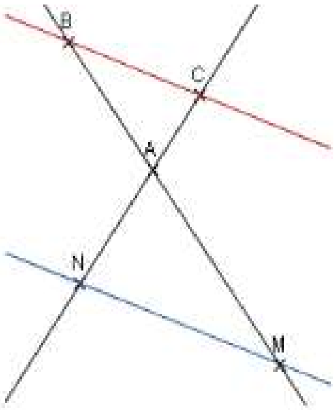
Théorème :

Soit un triangle ABC, et deux points M et N, M sur la droite (AB) et N sur la droite (AC), de sorte que la droite (MN) soit parallèle à la droite (BC) Alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$







Réciproque du théorème de Thalès :

Si, d'une part les points A, M, C et d'autre part les points A, N, B sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

I. Version vectorielle du théorème de Thalès

Activités :

Soient (D) et (Δ) sont 2 droites et A, B et C sont 3 points alignés et A', B' et C' leurs projetés sur (D) parallèlement à (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\overrightarrow{AA'} = a\vec{u}, \overrightarrow{BB'} = b\vec{u} \text{ et} \overrightarrow{CC'} = c\vec{u}$$

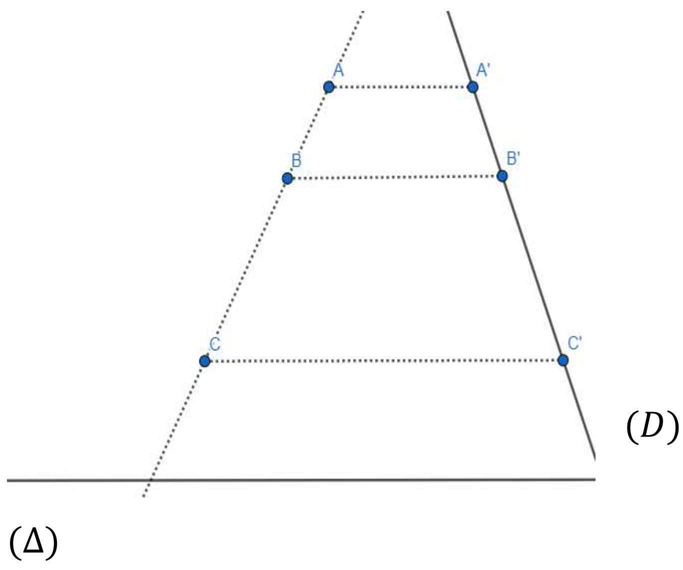
Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \quad si\ et\ seulement\ si \quad \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$$

1. Théorème :

Si A, B et C sont 3 points alignés et si A', B' et C' sont les projetés des points A, B et C sur une droite (D) parallèlement à une droite (Δ) et si k est un réel, alors :

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \quad si\ et\ seulement\ si \quad \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$$



2. Propriétés :

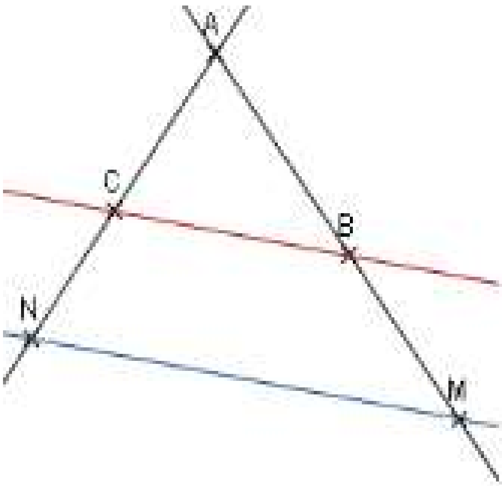
La projection sur une droite conserve :

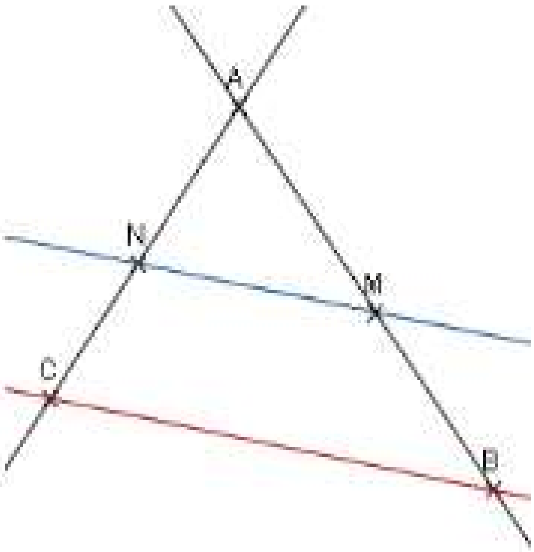
- L'alignement de 3 points
- Le coefficient d'alignement de 3 points
- Le milieu d'un segment

3. Théorème de Thalès :

Si $A, M\ et\ B$ sont 3 points alignés et si sont alignés tels que : $(AB)\ //\ (MN)$ et si $k \in \mathbb{R}$, alors les 3 égalités sont équivalentes :

- $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$





Exercice d'application :

$ABCD$ est un parallélogramme, (Δ) une droite variable qui passe par le point A et coupe la droite (CD) en M et la droite (BC) en N.

On considère les réels $x\ et\ y$ tels que : $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CB} = y\overrightarrow{CN}$

1. Faire une figure convenable.

2. En remarquant que :$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$, montrer que $x + y = 1$.

II. Réciproque du théorème de Thalès

Activités :

Montrer que si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$, alors $(AB) // (MN)$

Théorème :

Si $k \in \mathbb{R}$ et $A, B, C, M\ et\ N$ sont des points distincts (2 à 2) tels que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$

Alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exercice d'application :

Soit un triangle ABC, et deux points $M\ et\ N$ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

1. Faire une figure convenable.

2. Prouver que $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$, en déduire que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.