Lycée Qualifiant Michlifen – Azrou
Classe : 2ème bac Sc.Maths.Fr
Prof : OUBIJI

# Devoir à la maison N° 1

Publié le 15 Octobre 2022

***Exercice1 :***

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 1 + 2\sqrt{2}; \forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = 4\sqrt[3]{u_n - 1} + 1$$

1-Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}: 1 < u_n < 9$

2-Etudier la monotonie de $(u_n)$ .

3-a) Vérifier que :$\forall n \in \mathbb{N}: 0 < 9 - u_{n+1} < \frac{2}{3}(9 - u_n)$

b) Démontrer par *récurrence* :$\forall n \in \mathbb{N}: 0 < 9 - u_n < 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c)Montrer que la suite$(u_n)$est convergente et calculer sa limite

d)Retrouver cette limite en considérant la fonction $f: x \longmapsto 4\sqrt[3]{x - 1} + 1$

***Exercice2 :***

1) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $I = [\sqrt{2}, +\infty[$ et vérifier que $f(I) = I$

2) On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq \sqrt{2}$

b) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

c) Montrer que$(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

***Exercice3 :***

On considère 2 suites numériques définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad , v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Montrer que les 2 suites $(u_n)$ *et* $(v_n)$ sont adjacentes

***Exercice4 :***

On considère 3 suites numériques définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad , v_n = u_{2n} \quad , w_n = u_{2n+1}$$

Montrer que les 2 suites $(v_n)$ *et* $(w_n)$ sont adjacentes

***Exercice5 :***

Soit $n \in IN^*$. On considère la fonction numérique $f_n$ à variable réelle $x$ définie par :

$$f_n(x) = -1 + 2Arc\tan x + (Arc\tan x)^n$$

1-Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $IR^+$une unique solution $x_n$

2-Vérifier que $0 < x_n < \tan\frac{1}{2}$, en déduire que $0 < (Arc\tan x_n)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (Arc\tan x_n)^n$

3-Montrer que $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ pour tout $x \in \left]0, \tan\frac{1}{2}\right[$ ,en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq1}$

4-Prouver que $(x_n)_{n\geq1}$ est convergente et déterminer sa limite.

***Exercice6 :***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in I = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ on pose : $f_n(x) = (arctanx)^n + x^2 + 2x - 1$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n$ dans $I$.
2) Montrer que *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} (arctanx)^n = 0$
3) Montrer que $\forall x \in I : f_{n+1}(x) < f_n(x)$
4) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante, en déduire qu'elle *converge*
5) Calculer la limite de la suite $(u_n)$.

***Exercice7 :***

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = (\sin x)E\left(\frac{1}{x}\right)$

1-a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $\left|f(x) - \frac{\sin x}{x}\right| \leq |\sin x|$

b) En déduire que $f$ est prolongeable par continuité en 0

2-Etudier la continuité de $f$ en 1.

***Exercice8 :***

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $I = [1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(1) = \dfrac{\pi}{2} \\ f(x) = arctan\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), si\ x > 1 \end{cases}$$

1) Montrer que $f$ est continue à droite au point *1*

*2) En remarquant que* $f = arctan\ o\ g$, *où* $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ montrer que la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $I$.

*3)* Montrer que $\frac{\pi}{4} + Arc\tan\frac{1}{2} \in J$, *où* $J = f(I)$ puis prouver que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{4} + Arc\tan\frac{1}{2}$ admet dans $I$ une unique solution $\alpha$, *puis* calculer $\alpha$

4) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.