Lycée Michlifen - Classe : 2ème Bac Sc.Maths.Fr

Prof : OUBIJI

Devoir surveillé N°1 – Durée :2h -1 Novembre 2022

N.B : L'utilisation des dérivées des fonctions $\sqrt[n]{\ }$, n ≥ 3 et arctan est strictement interdite

Exercice1 : (4pts)

On considère 2 suites numériques définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}, v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \; et \; u_0 = 0 , v_0 = 2$$

1) Prouver que la suite $(w_n) = (v_n - u_n)$ est géométrique. (1pt)

2) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}: u_n < 1 < v_n$.(1pt)

3) Montrer que les 2 suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. (2pts)

Exercice2 : (6pts)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$et f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = arctan\sqrt[3]{x+n} - arctan\sqrt[3]{x}$

1) Prouver que f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.(0.75pt)

2) Vérifier que : $\frac{\pi}{4} \leq arctan\sqrt[3]{n}$.(1pt)

3) On admet que f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{\pi}{4}$ admet dans $\mathbb{R}^+$une unique solution x_n. (1pt)

b) Démontrer que $\forall n \geq 2$: $x_n < 1$. (1pt)

c) Montrer que la suite (x_n) est croissante, en déduire sa convergence. (1.25pt)

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. (1pt)

Exercice3 : (4pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [0\,;2\sqrt{2}]$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt[3]{x}$ et

1) Montrer que f est une bijection de I $vers$ I. (1pt)

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $0 < u_0 < 2\sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

a) Déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \in I$. (1pt)

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n), en déduire qu'elle est convergente. (0.75pt + 0.25pt)

c) Calculer la limite de la suite (u_n). (1pt)

<u>Exercice 4 :</u> (6pts)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $arctan(2x) + arctan(x) < -\frac{\pi}{4}$. (2pts)

(Indications : On montrera que si x est une solution alors $x < 0$ et que $\left(-\frac{\pi}{4} - arctanx\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ etc…)

2) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}\right) = 2$. (1.5 pt)

3) Montrer que : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{arctan(\sqrt[3]{arctanx})}{\sqrt[3]{2x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ et $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{3-x}-\sqrt{3-x}}{1-\sqrt[4]{3-x}} = \frac{2}{3}$. (0.5pts+2pts)