Équations différentielles -Exercices

Niveau : Bac Sciences Mathématiques

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(1) : y'' - 3y' - 2y = 0$

$(2) : y'' + 2y' + y = 0$

$(3) : y'' + y' + y = 0$

$(4) : y'' + 4y = 0$

$(5) : y'' - y' = 0$

$(6) : y^{(3)} - 2y'' = 0$

(7) *:* $4y'' + 16y' + 25y = 0$

(8) : $y'' - 5y' + 6y = 0$

(9) : $4y'' - 4y' + y = 0$

(10) : $3y^{(3)} - 2y'' - 3 = 0$

Exercice 2 :

Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m les solutions de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + (1-m)y = 0$

Exercice 3 :

On considère les équations différentielles :

$(1): y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$ *et* $(2): y'' - y' - 2y = 0$

1- Déterminer la solution générale de l'équation (2)

2-Soit g *une fonction numérique deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$*.*

a-Déterminer une solution particulière f *de (1) sous la forme :*

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

b-Montrer que : ψ *est solution de* $(1) \Leftrightarrow \psi - f$ *est solution de* (2)

Déduire la solution générale de (1).

Exercice 4 :

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle linéaire suivante avec second membre :

$$(E): y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

1) Chercher une solution particulière de (E) *sous la forme :*

$$y_0 = (ax + b)e^{2x}$$

2) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y'' - 5y' + 6y = 0$

3) Montrer que :

$$y \text{ est solution de}(E) \Leftrightarrow y - y_0 \text{ est solution de}(E')$$

4) Donner la solution générale de l'équation différentielle (E)

5) Trouver la solution particulière f *de* (E) *sachant que sa courbe représentative passe par le point* $A(0; 1)$ *et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation* $2x + y - 1 = 0$

Exercice 5 :

Soit F *la primitive de la fonction* $f: t \longmapsto \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ *sur* $\mathbb{R}$*, qui s'annule en 0.*

1) Prouver que F est impaire.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+; \ln(1 + 2x) \leq F(x)$ *et déterminer* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

3.a) Montrer que F *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$*. On pose :*$G = F^{-1}$

b) Montrer que G *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+; G'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4G^2(x)}$$

c) En déduire que G *est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que* G *est une solution de l'équation différentielle* $y'' - y = 0$

d) Calculer $G(0)$*et* $G'(0)$ *puis écrire* $G(x)$ *et* $F(x)$ *en fonction de* x

Exercice 6 :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. On considère l'équation différentielle (E) :$x \in]0,+\infty[: f'(1-x) = f(x)$

1) Vérifier que $f''(1-x) + f(1-x) = 0$

2) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E)

Exercice 7 :

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$(E): \; yy'' - 2(y')^2 - 2yy' - y^2 = 0$$

1-a) On pose : $y = \frac{1}{z}$

Calculer y' , y'' en fonction de z , z' , z''

b) Montrer que :

$$[\, y \text{ est solution de } (E)\,] \iff [\; z \text{ est solution de } (E')\,]$$

Où : (E') est l'équation différentielle linéaire suivante :

$$z'' - 2z' + z = 0$$

c) Résoudre (E') , en déduire les solutions de (E)

2) Déterminer la solution f de (E) telle que : $f(1) = \frac{1}{e}$ et $f(0) = 1$

Exercice 8 :

On considère l'équation différentielle :

$$(E): xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$

Où yest la fonction inconnue deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$.

On pose $z = xy$.

1) Montrer que :

$$z'' + 2z' + z = 0 \Leftrightarrow yestsolutionde(E)$$

2) Intégrer(E).

Exercice 9 :

Soit f *une fonction deux fois dérivable sur* $]0,+\infty[$.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) :x \in]0,+\infty[: f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) Montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\ : x^2 f"(x) + f(x) = 0$$

2) Vérifier que la fonction $g: x \mapsto f(e^x)$ *est une solution de l'équation différentielle* $y" - y' + y = 0$

3) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E)