Exercices de Logique

Exercice 1:

1) Évaluer les propositions suivantes :

$\pi < 3 \; ou \; \pi \neq 3$; $(-4)^{10} \in \mathbb{N} \; et \; \sqrt{(-5)^8} \in \mathbb{N}$

$\sqrt{3+7} = \sqrt{3} + \sqrt{7} \; ou \; \left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$; $1 = -1 \; et \; 0^2 \neq 0$

2) Soit a, b, c des réels. Ecrire la négation des propositions suivantes :

$a < 10 \; et \; b \geq 5$; $a < 4 \leq b$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \; ou \; \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;

$1 + 1 = 2 \; ou \; 1 \times 1 = 2$

3) Trouver les réels a, b sachant que : $\begin{cases} |a| = 1 \\ a + 2b^2 = 3 \end{cases}$

Exercice 2 :

Montrer que : (Raisonnement par déduction)

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \geq 7 \Rightarrow (a-4)^2 + 3 \geq 12$$

Exercice 3 :

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$:

* $x \in \mathbb{R} : x = 2 \dots\dots. x^2 = 4$

* $x \in \mathbb{R} : |x| = 2 \dots\dots. x = 2 \; ou \; x = -2$

* $x \in \mathbb{R} : x^2 > 1 \dots\dots. x > 1$

* $x \in \mathbb{R} : |x| < 3 \dots\dots. -3 < x < 3$

* $x \in \mathbb{R} : |x| > 3 \dots\dots. x > -3$

* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $x^2 + y^2 = 1 \dots\dots (x = 1 \; et \; y = 1)$

Exercice 4 :

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

- Tout entier naturel est pair ou impair

-Le carré de tout réel est positif.

-Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

- L'équation sin x = x a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$

- Evaluer les propositions suivantes et écrire leurs négations :

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 > 0$; $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = -1$; $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 = 9$

Exercice 5 :

Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

$P: \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+1} = \sqrt{x} + 1$

$Q: La\ fonction\ numérique\ f: x \longmapsto x^2 + x^3\ est\ paire$

Exercice 6:

On considère *les propositions suivantes :*

$$P: \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \geq y$$

$$Q: \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}: x \geq y$$

Ces propositions ont-elles le même sens ? Dire pourquoi. Evaluer les.

Exercice 7 :

En donnant un *contre-exemple*, montrer que la proposition suivante est fausse :

$$P: "\ \forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2: |x + y| = |x| + |y|\ "$$

Exercice 8 :

Démontrer *par équivalences successives* que :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{1 + x^2} - x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + x^2} + x = \frac{1}{2}$$

Exercice 9 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|1-x|+|2x-1|=3$

(Disjonction de 3 cas : $x \geq 1$; $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; $x \leq \frac{1}{2}$)

Exercice 10:

Montrer par *contraposition* que :

1) $\forall (x,y) \in [1,+\infty[^2 : x \neq y \Rightarrow x^2-2x \neq y^2-2y$

2) $\forall x \in [1,+\infty[$ et $\forall y \in [2,+\infty[$:

$$(x \neq 5 \; et \; y \neq 3) \Rightarrow x+y-4\sqrt{x-1}-2\sqrt{y-2}+2 \neq 0$$

Exercice 11 :

Montrer par contraposition que :

1) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}: b \neq -2a \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$

2) $\forall x \in [1,+\infty[$ et $\forall y \in [2,+\infty[$:

$$(x \neq 5 \; et \; y \neq 3) \Rightarrow x+y-4\sqrt{x-1}-2\sqrt{y-2}+2 \neq 0$$

3) $\forall (x,y) \in [1,+\infty[^2 : x \neq y \Rightarrow x^2-2x \neq y^2-2y$

Exercice 12 :

1) Démontrer que pour tout entier relatif n, le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier pair.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|1-x|+|2x-1|=3$

3) Montrer que pour tout entier relatif n , l'entier n^3-n est un multiple de 3

Exercice 13 :

Soit n un entier naturel, tel que n^2 soit impair.

Démontrer par *l'absurde* que : n est impair.

Exercice 14:

Soit a, b, c des réels positifs tels que $ab < c$.

Montrer par *l'absurde* que : $\left(a < \sqrt{c} \ ou \ b < \sqrt{c}\right)$

Exercice15 :

Soit n un entier naturel non nul. Démontrer par *l'absurde* que si n est le carré d'un entier, alors 2n n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 16 :

Démontrer par récurrence que :

1) $\forall n \in IN : 2^n > n$

2) $\forall n \in IN^* : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) $\forall n \in IN / n \geq 2 : \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$

4) $\forall n \in IN : 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9

Exercice 17 :

Montrer que :

1) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} : \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$

2) $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{1 + x^2} - x = 2 \iff \sqrt{1 + x^2} + x = \frac{1}{2}$