Exercices portant sur les suites numériques

Niveau : Bac.Sc.Maths

Exercice 1 :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par *:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

1) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \ u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2)En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par *:*

$$u_0 = 0 \ et \ \forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$$

1) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}: u_n < 4$

2-a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(4 - u_n)$

b) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}: |u_n - 4| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

2)En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par *:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx)$$

Où x est un nombre réel donné.

1) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}x$

2)En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite

Exercice 4 :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; et \; \forall x \in \mathbb{R}^+ : \; f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$$

1.a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$

b) Montrer que : $x_n \in]0; 1[$

2.a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

b) Calculer $x_1 \; et \; x_2$, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} {x_n}^n = 0$

3.a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{1\} : \; f_n(x) = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*: x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n$

c) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*: x_n \geq \frac{1}{2}$

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique définie sur $I =]-\infty; -1]$ par :

$$f(x) = x - \sqrt[3]{-x^3 - x^2}$$

1) Vérifier que la fonction f est strictement croissante sur I.(Sans dérivée de $\sqrt[3]{u}$)

2) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à determiner.

3) Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$v_0 < -1 \text{ et } \forall n \in IN: v_{n+1} = f^{-1}(v_n)$$

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}: v_n < -1$

b) Etudier la monotonie de la suite (v_n), en déduire qu'elle converge et trouver sa limite.

Exercice 6 :

On considère les suites numériques $(a_n), (u_n) et (v_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad , \quad u_n = a_{2n} \quad et\ v_n = a_{2n+1}$$

1) Montrer que les 2 suites (u_n)et(v_n) sont convergentes.

2) En déduire que la suite (a_n) converge.

Exercice 7 :

1)Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$$

Montrer que $f([0; 1[) \subset [0; 1[$

2)Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3 \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < 1$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

3) On considère la suite numérique (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sqrt[3]{u_n} - 1$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n puis retrouver le résultat de la question 2.c)

4)On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ S_n = \sum_{i=0}^{n} \sqrt[3]{u_i}$$

Ecrire S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

<u>Exercice 8 :</u>

On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \ ; \ v_0 = b \ avec \ a > 0 \ et \ b > 2a \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ \dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} \ \ et \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < v_n$

2) Etudier la monotonie des suites(u_n) et (v_n) .

3.a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n}$

4) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5) On pose $\forall n \in \mathbb{N} : \ w_n = \sqrt{u_n v_n}$

a) Prouver que la suite (w_n) est constante.

b) En déduire la limite commune des suites(u_n) et (v_n) .

<u>Exercice 9 :</u>

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f_n(x) = x^n + \frac{3}{2}x - 1$$

1)Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $\left[0; \frac{2}{3}\right]$.

2) Calculer les deux premiers termes de la suite (u_n)

3) Calculer la limite de la suite (u_n^n)

4) Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0; 1]$.

5) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

6) Montrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.