Exercices & problèmes : Nombres complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Exercice 1

En posant $z = x + iy; (x, y) \in \mathbb{R}^2$,écrire la forme algébrique de $\frac{z^2}{z+1}$, en déduire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z dans le plan complexe dans chacun des cas suivants :

a) $\frac{z^2}{z+1}$ est un nombre réel

b) $\frac{z^2}{z+1}$ est un nombre imaginaire pur

Exercice 2

Trouver algébriquement les racines carrées de $(-1 + i)$, en déduire la valeur exacte de $tan \frac{3\pi}{8}$

Exercice 3

Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe :

$$\frac{2i(1+z)}{1-\overline{z}} \text{ où } z = cos\, \theta + i\, sin\, \theta \text{ et } \theta \in]0, \pi[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

Exercice 4

Déterminer ***sans calculs*** l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z dans le plan complexe dans chacun des cas suivants :

a) $|iz - 1 + 2i| = |\overline{z} - i|$

b) $|(1 - i)\overline{z} + 1| = 1$

c) $\frac{z+1-i}{z+2+3i} \in \mathbb{R}$

d) $arg((1 - i)z) \equiv arg\left(\frac{3+i}{z}\right) [2\pi]$

e) $\frac{z+1}{z+i} \in i\mathbb{R}$

Exercice 5

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

Calculer en fonction de x et n les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx)$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $|z+i| = |z-i|$

b) $(z-i)^n = z^n$, écrire les solutions sous forme algébrique

c) $z + 3\overline{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$

Exercice 7

A et B deux points dans le plan complexe d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1-Déterminer sous forme exponentielle les affixes : du point

C image de B par la rotation $r(O, \frac{2\pi}{3})$ et du point D le barycentre des points pondérés$(A, 2)$,$(B, -1)$,$(C, 2)$

2- Vérifier que les points A,B,C,D sont sur le même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

2-SoitD' le point image de$D$par l'homothétie de centre Aet de rapport 2.

Déterminer la nature du triangle CDD'

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E): z^2 + (\sqrt{3} - 1)(1 + i)z + 4i = 0$

1) Vérifier que le discriminant de (E) est : $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2(1 - i)^2$ et déterminer les solutions a et b de l'équation (E) telles que $Im(a) < 0$

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}: a^n + b^n = 2^{n+1}\left[cos\left(\frac{7\pi n}{12}\right)\right]e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

, en déduire $cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) Donner l'expression complexe de la rotation *r* de centre Oet transforme Ben A

Exercice 9

On considère un nombre complexe m distinct de $(-1 - i)$, et l'équation (E) :

$$z^2 + (2 + im)z + (im + 2 - m) = 0$$

1- Vérifier que le discriminant de (E) est : $\Delta = [i(m - 2)]^2$ et déterminer ses solutionsz_1 et z_2

2-Soient M,A,Bles points d'affixes respectives$m$, $a = -1 - i$,et

$b = i - im - 1$ dans le plan complexe

a- Montrer que : $\frac{b-a}{m-a} = i\frac{2-m}{m+1+i}$

b- Montrer que :

(les points M,A,B sont alignés) $\Leftrightarrow(2m\overline{m} - (m + \overline{m}) - i(m - \overline{m}) - 4 = 0)$

c- En déduire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe *m* dans le plan complexe tels que M,A,B soient alignés

Exercice 10

On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $a = \omega + \omega^4$, et $b = \omega^2 + \omega^3$

1-Prouver que : $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$ et calculer $a + b$ et ab

2- En déduire le cosinus de chacun des nombres suivants :

$$\frac{2\pi}{5} ; \frac{4\pi}{5} ; \frac{3\pi}{5} ; \frac{\pi}{5}$$

Exercice 11

1) Montrer algébriquement que le nombre complexe $16i$ admet exactement deux racines carrées complexes sont $\delta = 2\sqrt{2}(1+i) et (-\delta)$

2) Déterminer sous la forme algébrique dans $\mathbb{C}$ les solutions telles que $Re(z_1) > 0$; de l'équation : $z^2 - 4iz - 4(1+i) = 0$

3) Ecrire z_1, z_2 sous forme exponentielle

Exercice 12

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$ Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z dans le plan complexe vérifiant : $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$

Exercice 13

Soient a un nombre complexe de module 1, $z_1, z_2, \dots, z_n$ les racines de l'équation :

$$z^n = a$$

Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont

$(1+z_1)^n, (1+z_2)^n, \dots, (1+z_n)^n$ sont alignés.

Problème 1

Les deux parties I) et II) sont indépendantes

I) On considère dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$(E): (z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = 0$$

$$(E_1): z^2 + (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0$$

$$(E_2): z^2 + (4 - 3i)z + 1 - 5i = 0$$

1) Calculer $(2 + i)^2$ puis déterminer les solutions de l'équation (E_1)

2) Montrer que :

$\forall z \in \mathbb{C}: [z est solution de (E_1)] \Leftrightarrow [\overline{z} est solution de (E_2)]$

3) Déterminer les solutions de l'équation (E)

II) On considère dans le plan complexe les points A, B, C, D d'affixes respectives $a = -3 - 2i$, $b = -3 + 2i$, $c = -1 + i$, $d = -1 - i$, $a' = -\frac{5}{2} + 2i$

1) Montrer que les points A, B, C, D sont cocycliques.

2) E est le point d'affixe $e = (\sqrt{3} - 1)i$. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}})$

3) Calculer l'affixe c' du point C' image de C par la rotation de centre D et transforme E en C.

4) Calculer $\frac{a-c}{a'-c}$, en déduire la nature du triangle $AA'C$

Problème 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

Soit M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

1) Déterminer le nombre complexe z tel que les deux points M et M' soient confondus.

2) On suppose que le point M est différent des deux points A et B d'affixes respectives $1 et -1$

Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$

Montrer que :

Si le point M appartient à (Δ) , alors le point M' appartient à (Δ)

4) Soit (Γ) le cercle dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$

Montrer que :

Si le point M appartient à (Γ) , alors le point M'appartient à(AB).

Problème 3

1) Pour tout nombre complexe non nul z différent de i on pose :

$$h(z) = i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$$

a) Vérifier que : $h(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^2 - 2iz - 2 = 0$

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

On désigne par a et b les solutions de l'équation (E) tels que :

$$Re(a) = 1$$

Soit z un nombre complexe différent de i de a et de b et les points $M(z)$, $M'(h(z))$, $A(a)$ et $B(b)$.

a) Montrer que :$\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = \frac{z-a}{z-b}$

b) En déduire que : $\overline{(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A})} \equiv \pi + \overline{(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})}[2\pi]$

3) a) Montrer que si les points M, A et B sont alignés alors les points M, A et B et M' sont alignés.

b) Montrer que si les points M, A et B ne sont pas alignés alors les points M, A et B et M' sont cocycliques.

Problème 4

Soit m un nombre complexe.

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue *z :*

$$z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

1-a) Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation(E_m).

b) Donner suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)

2) Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

II-Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, Ω, M *et* M' d'affixes $a = -1 - i, \omega = i, m$ et $m' = -im - 1 + i$ respectivement.

1- Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M *en* M'.

a) Vérifier que Ω est le centre de la rotation R.

b) Déterminer l'affixe b *de* B , où B est le point tel que $A = R(B)$

2-a) Vérifier que : $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$

b) En déduire que les points A, M *et* M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω *et* M sont cocycliques.

c) Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A, M *et* M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Problème 5

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2-(1+\sqrt{3})(1+i)z+4i=0$$

1-a) Vérifier que le discriminant de (E) est :

$$\Delta=\left((\sqrt{3}-1)(1-i)\right)^2$$

b) Ecrire sous la forme exponentielle les solutions de l'équation (E)

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points$A$, B d'affixes respectives $a=1+i\sqrt{3}$ et

$b=\sqrt{3}+i$

a) Montrer que l'ensemble (D) des points $M(z)$ tels que $z=\frac{1}{2}a\overline{z}$ est une droite passant par B.

b) Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z' tels que $z'=a\overline{z}-b$ et $z\neq b$.

Montrer que :$\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)}=\frac{2}{|z-b|^2}$

c) En déduire que la droite (D) est la bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}}\right)$