Exercices & problèmes
Logarithmes & exponentielles

Exercice 1

Le nombre n est un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Simplifier les sommes et les produits suivants :

$$\prod_{k=1}^{n} k^2 \quad ; \quad \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \ avec\ n>1\ ; \ \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \quad ; \quad \sum_{k=2n}^{k=4n-1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Exercice 2

Montrer que :

$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \frac{x^2}{2} \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x$; en déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

(On étudiera les variations des fonctions $f : x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) e^x + 1 + x$ et $g : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 1 + x - e^x$sur $\mathbb{R}$)

Exercice 3

1) Etudier les variations de la fonction numérique :

$$\phi : x \mapsto 2\,ln\,x - x + \frac{1}{x} \quad \text{sur} \quad]0;+\infty[$$

2) Vérifier que :

$$\forall x > 0 :\ ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

3) ***En déduire*** que : $\forall x > 0 : ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

Exercice 4

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \sum_{k=1}^{k=n} e^{-\frac{k}{n^2}}$

1) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{k=n} k^2$

2-a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n \geq ne^{-\frac{1}{n}}$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est divergente

3) Montrer que $\forall x \in]-\infty; 0]: 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

4) Vérifier que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$-\frac{n+1}{n} \leq u_n - n \leq -\frac{n+1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

5) ***En déduire*** que la suite $(u_n - n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} ; si x < -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue à gauche en -1

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{f(x)-1}{x+1} = +\infty$

3-a) Prouver que : $\forall x < -1: f'(x) = -\frac{1}{x^2} f(x)\left[1 + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]$

b) Résoudre : $f'(x) = 0$ puis $f'(x) > 0$, en déduire le sens de variations de f .

Exercice 6

Exercice d'une suite implicite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \longmapsto e^{-x} - x^{2n-1}$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution qu'on note u_n

2) Montrer que $0 < u_n < 1$

3) Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

4) Montrer que la suite (u_n) est croissante, en déduire qu'elle converge.

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ \ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n-1}$. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = nx - e^{-x}$

1. Dresser le tableau de variations de f_n.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue le réel x admet une unique solution qu'on note u_n.
3. Montrer que pour tout un entier naturel n non nul on a : $0 < u_n < \frac{1}{n}$
4. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
5. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x > 0$, en déduire la monotonie de la suite (u_n)
6. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (n.u_n)$

PROBLÈME 1

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\forall x \neq 0:\ f(x) = \frac{\boldsymbol{ln}(1+x) - x}{x^2}; et\ \ f(0) = -\frac{1}{2}$$

1) Etudier les branches infinies de la courbe représentative $C_f$de f

2) On pose : $\forall x > 0: \phi(t) = [ln(1+x) - x]t^2 - [ln(1+t) - t]x^2$

En appliquant le théorème de Rolle à la fonctionφ prouver que :

$\exists c \in]0; x[: f(x) = \frac{-1}{2(1+c)}$; en déduire la continuité de$f$ en 0.

On admet dans ce qui suit que : $f'(0) = \frac{1}{3}$

3)Étudier le signe de la fonction $g: x \mapsto \frac{2x+x^2}{1+x} - 2\,ln(1+x)$

4)Vérifier que : $\forall x \in]-1; +\infty[\setminus\{0\}: f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$; et donner le tableau de variations de f puis tracer C_f

On admet dans ce qui suit que f''est strictement négative sur$0; +\infty[$.

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solutionα dans$]-1; +\infty[$

b) Montrer que la suite (u_n) définie par :

$u_0 > -1$et$\forall n \in IN: u_{n+1} = -f(u_n)$ converge et calculer sa limite

PROBLÈME 2

I) On considère la fonction numérique $g$définie sur IR^+par :

$$\forall x > 0: g(x) = 1 - x\,ln\,x \quad \text{et} \quad g(0) = 1$$

a) Etudier la continuité de $g$en 0 à droite et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) Etudier les variations de g et donner son tableau de variations

c)Montrer que : $(\exists!\, \alpha > e^{-1}: g(\alpha) = 0)$

d) Étudier le signe de la fonction g

II) On considère la fonction numérique f définie sur $e^{-1}; +\infty$[par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{ln(1+ln\,x)}{x}}; x > e^{-1} \\ f(e^{-1}) = 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f à droite au pointe^{-1}

2)Montrer que la droite $(\Delta): y = 1$ est asymptote à Cf au voisinage de $+\infty$et étudier la position relative de Cf par rapport à (Δ)

3) a) Montrer que f est dérivable sur$]e^{-1}; +\infty[$ et que :

$$\forall x > e^{-1}: f'(x) = \frac{g(1 + ln\,x)}{x^2(1 + ln\,x)} f(x)$$

b) Résoudre dans $]e^{-1}; +\infty[$ l'équation : $f'(x) = 0$

4) Montrer que f est dérivable à droite au point e^{-1} et que

$f_d'(e^{-1}) = 0$ puis donner le tableau de variations de f

5) Construire Cf dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ tel que :

$$||\vec{\imath}|| = 2cm.$$

On admet queCf admet deux points d'inflexions sur $]e^{-1}; 1[$ et sur $]e^{\alpha-1}; +\infty[$.

On donne : $e^{\alpha-1} \approx 2{,}2$ et $f(e^{\alpha-1}) \approx 1{,}3$.

PROBLÈME 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = nx + \frac{1}{1 + e^x}$$

et on considère (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

1. Calculer $f''(x)$, en déduire que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$

3. Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de (C_n)

4. Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1 puis tracer (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1)

5. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue le réel x admet une unique solution notée u_n.

3. Montrer que pour tout un entier naturel n non nul on a :

$$-\frac{1}{n} < u_n < 0$$

4. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

PROBLÈME 4

Soit (S_n) la suite numérique définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*: S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$; en déduire que (S_n) est divergente.

(On dit que la série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge)

2) Montrer que$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{n+1} \leq ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ (TAF)

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = S_n - ln(n+1)$ et $v_n = S_n - ln\, n$

a) Montrer que$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n \leq v_n$

b) Montrer que(u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $T_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*: T_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*: ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq T_n \leq ln\, 2$

c) Montrer que (T_n) converge et déterminer sa limite.