Exercices :

Dérivabilité,
Théorème de Rolle, T.A.F,
Primitives,
Etude de fonctions

Exercice 1 :

Soit $f: x \mapsto sin(x\sqrt{x})$

a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+}$ et définir sa fonction dérivée.

Exercice 2 :

Déterminer le domaine D' de dérivation de f puis calculer $f'(x)$ pour tout x de D', dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = tan\frac{1}{x} + \tan(3x)$

b) $f(x) = cos(sin(2\pi x))$

c) $f(x) = cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - sin(\frac{\pi}{4} - 3x)$

d) $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - \sqrt{x} + (x^2 + 1)^{\frac{2}{5}}$

e) $f(x) = x\sqrt[3]{1 - x^2}$

Exercice 3 :

On pose $f(x) = \sqrt[3]{3 - 2x} - 2\sqrt[5]{2 - x}$ ***et*** $g(x) = (-2x + 1)^{21} - 1$

1) Calculer $f'(x)$ *et* $g'(x)$ *pour tout* $x < \frac{3}{2}$

2) En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3-2x} - 2\sqrt[5]{2-x}}{(-2x+1)^{21}-1}$

Exercice 4 :

1) Montrer que la fonction $f: x \longmapsto 2x - x^2$ est une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

2) Montrer que sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J

3) Calculer $f(2)$ et calculer $(f^{-1})'(0)$

4) Calculer $(f^{-1})'(-3)$

Exercice 5 :

Vérifier que les hypothèses du théorème de Rolle s'appliquent à la fonction $f: x \mapsto x^3 - x$ *sur* $[-1; 1]$ *puis trouver le point c qui satisfait à la conclusion.*

Exercice 6 :

f est une fonction continue sur[0 ;1] dérivable sur]0 ;1[telle que : $f(0) = 0 \; et \; f(1) = 1$

Montrer que : $\exists c \in]0\,;1[:\; f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$

Exercice 7 :

Soit P la fonction polynômiale définie par :

$$P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$$

Montrer que P' s'annule au moins une fois sur]0, 1[.

Exercice 8 :

1- appliquer le TAF à la fonction $f : x \to arctanx$ *sur* $[0\,;x]$ *où* $x > 0$.

2-En déduire la valeur de : $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{arctanx}{x}$ *puis celle de* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctanx}{x}$

Exercice 9 :

1) appliquer le TAF à $f: x \mapsto \sqrt[3]{x} - \sin\sqrt[3]{x}$*sur* $[0; t^3]$*où t>0*

2) En déduire la valeur de : $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{t - sint}{t^3}$

Exercice 10 :

Soit la fonction $f: x \mapsto xsinx$

1) Vérifier que :$\forall x \in]0; 10[: |f'(x)| \leq 11$

Montrer que :

$$\forall (x, y) \in]0; 10[^2: |x \sin x - y \sin y| \leq 11|x - y|$$

Exercice 11 :

Soit a, b *des réels tels que :* $0 \leq a < b$.

Montrer que $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

En déduire la valeur de : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan x -}{x^2}$

Exercice 12 :

Montrer que : $\forall(x,y) \in IR^2 : |sinx - siny| \leq |x-y|$

Exercice 13 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - \sqrt{-x} + \dfrac{1}{x^3} + 1 & si\ x < -1 \\ \dfrac{1}{(2x+3)^2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}} & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

1) Montrer que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$

2) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$

3) Quelle est la primitive G de f qui s'annule au point -1 ?

Exercice 14 :

Déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^4+1}$; $I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2+1}$; $I = \mathbb{R}$
3) $f(x) = \frac{1}{2x^2-4x+5}$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 15 :

Déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1) $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$; $I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = tan^2x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
3) $f(x) = \sin^2 x$; $I = \mathbb{R}$
4) $f(x) = \sin^3 x$; $I = \mathbb{R}$
5) $f(x) = \cos^4 x$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 16 :

Déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(4x) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; $I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = tan^2x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

3) $f(x) = \sin^2 x \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
4) $f(x) = \sin^3 x \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
5) $f(x) = \cos^4 x \ ; \quad I = \mathbb{R}$
6) $f(x) = xcos(x^2) - x^2\sin(x^3) \ ; \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 17 :

Déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{x} + x^{\frac{2}{3}} - \frac{x}{\sqrt[5]{x^2}} \quad ; \quad I =]0, +\infty[$
2) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}; \quad I = \mathbb{R}$
3) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \quad ; \quad I = [0, +\infty[$
4) $f(x) = x\sqrt{x+1} \quad ; \quad I = [0, +\infty[$
5) $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^4}; \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 18 :

1) Montrer que la fonction : $F: x \mapsto 2Arc\,tan\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ est une primitive de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$

Exercice 19 :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2(1+x^2)^2}$$

1) Déterminer les nombres réels a , b , c tels que *:*

$$\forall x \in I: f(x) = \frac{a}{1+x^2} + \frac{bx}{(1+x^2)^2} + \frac{c}{x^2}$$

2) En déduire la primitive F de f qui s'annule au point 1.

Exercice 20 :

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$,$(0 < a < b)$, dérivable sur$]a, b[$.En appliquant le théorème de Rolle à une fonction h convenable montrer que :

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(c)}{3c^2}$$

Exercice 21 :

Soit $f: x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$

1) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}: \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

2) En déduire la primitive F de f qui s'annule au point 1

Exercice 22 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

1) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ est un centre de symétrie pour (C_f)

2-a) Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $I = \left[\frac{1}{2};1\right[$ et sur $I' =]1;+\infty[$ et étudier les variations de f *sur I et sur I'*

3-a) Etudier la convexité de (C_f) ; en déduire que $I(\frac{1}{2};0)$ est un point d'inflexion pour (C_f)

b) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

c) Tracer (C_f).

Exercice 23 :

Soit $f: x \mapsto \arctan\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} + 1$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1)Montrer que f *est* dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que :

$$\forall x > 0: f'(x) = -\frac{1}{3\left(1+\sqrt[3]{x}^2\right)}$$

2) En utilisant le théorème de accroissements finis montrer que :

$$\forall x > 0, \exists c_x \in]0,x[: f(x) - f(0) = -\frac{x}{3(1+\sqrt[3]{{c_x}^2})}$$

3)En déduire que f est dérivable à droite en 0 et calculer $f_d'(0)$

4)a) Ecrire l'équation de la demi-tangente à la courbe de f *au point d'abscisse 0.*

b) Etudier la branche infinie de Cf *et* tracer Cf dans un repère orthonormé.

5) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0;1[$une seule solutionα

6) Soit (u_n) la suite réelle définie par :

$$0 < u_0 < 1 \text{ et } \forall n \in IN: u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < u_n < 1$

b) Montrer que :$\forall x \in]0;1[: |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

c) En déduire que : $\forall n \in IN: |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$ **(I.A.F)**

d) Démontrer par **récurrence** que :

$$\forall n \in IN: |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |\alpha - u_0|$$

, en déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.