Lycée Qualifiant Michlifen – Azrou
Classe : 2ème bac Sc.Maths.Fr
Prof : OUBIJI

Devoir à la maison N° 2

Publié le 10 Novembre 2022

Exercice1 :

1) Montrer que la fonction : $F: x \mapsto 2Arc\tan\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ est une primitive de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$

Exercice2 : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 4x + 3} & si\ x > 1 \\ f(x) = 1 + x\sqrt[3]{1-x} & si\ x \leq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f admet des fonctions primitives définies sur $\mathbb{R}$.
2) Trouver la primitive F de f qui s'annule au point $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Problème : On considère la fonction numérique f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = -1 + Arc\tan\left(\sqrt[3]{x+1}\right); x > -1 \\ f(x) = x - \sqrt[3]{-x^2(x+1)}; x \leq -1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur IR
2) Etudier les branches infinies de la courbe représentative $C_f$de f
3) Etudier la dérivabilité de f au point $x_0 = -1$ et interpréter les résultats géométriquement.
4) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq -1$ puis dresser le tableau de variations de f.
5) Etudier l'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
6) Tracer C_f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
7) Soit $g$la restriction de $f$sur$I =]-\infty; -1]$
   a) Montrer que $g$est une bijection de I vers un intervalle J qu'on déterminera et représenter g^{-1}graphiquement dans le même repère$(O; \vec{i}; \vec{j})$.
   b) Montrer que$\forall x \in J: g^{-1}(x) \geq x$
   c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g^{-1}(x) = x$
8) Soit (u_n) la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]-\infty; -1] \\ \forall n \in IN: u_{n+1} = g^{-1}(u_n) \end{cases}$$

   a) Montrer que : $\forall n \in IN: u_n \in]-\infty; -1]$
   b) Déterminer les valeurs de u_0 pour que (u_n) soit constante.

On suppose que $u_0 \neq -1$

   c) Montrer que (u_n) est croissante
   d) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.