Lycée Qualifiant Michlifen – Azrou
Classe : 2ème bac Sc.Maths.Fr
Prof : OUBIJI

Devoir à la maison N°3

Publié le 01 décembre 2022 sur le site « lewebpedagogique.com/oubiji »

Exercice 1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \sum_{k=1}^{k=n} e^{-\frac{k}{n^2}}$

1) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{k=n} k^2$

2-a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n \geq ne^{-\frac{1}{n}}$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est divergente

3) Montrer que $\forall x \in]-\infty; 0]: 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

4) En déduire que la suite $(u_n - n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & ,si\ x<1 \\ x-1-\frac{lnx}{x} & ,si\ x\geq 1 \end{cases}$,

et soit Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1-a) Montrer que f est continue au point 1.

b) Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter les résultats obtenus graphiquement.

2-a) Calculer les limites de f en $\pm\infty$

b) Etudier les deux branches infinies de Cf

3) Vérifier que : $f'(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} & ,si\ x<1 \\ \frac{x^2-1+ln}{x^2} & ,si\ x>1 \end{cases}$ et donner le tableau de variations de f

4) Tracer la courbe Cf .On admet que Cf se trouve au-dessous de son asymptote sur $]-\infty, 1[$

Exercice 3

I) Soit la fonction $g: x \mapsto 1 + xe^x - e^x$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*: g(x) > 0$

II) Soit f la fonction numérique définie par : $f(0) = 1$ et $\forall\ x \neq 0: f(x) = \frac{x}{e^x-1}$,

et soit Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est continue au point 0

2) Etudier les branches infinies de la courbe C_f

3.a) On pose pour tous $x \in \mathbb{R}^*$ et $t \in \mathbb{R}$: $\varphi(t) = (e^x - 1 - x)t^2 - (e^t - 1 - t)x^2$

En utilisant le théorème de Rolle pour la fonction φ , montrer qu'il existe un nombre réel c de $]0; x[$ tel que : $\frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{e^c-1}{2c}$

b) En déduire la valeur de la limite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

c) Etudier la dérivabilité de f au point 0 et interpréter le résultat obtenu géométriquement.

4.a) Prouver que f est dérivable sur les deux intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et dresser le tableau de variations.

5) Tracer la courbe C_f.