Prof : OUBIJI

Devoir surveillé N°2 – Durée :2h

Exercice 1 : (3 pts)

Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = 2arc\,tan\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$

1) Montrer que F est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

2) En déduire $F(x)$ en fonction de $arctanx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice 2 : (5 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5} & si\ x < 1 \\ f(x) = 1 + x\sqrt{x-1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f admet des fonctions primitives définies sur $\mathbb{R}$.

2) Trouver toutes les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire la primitive G de f qui s'annule au point $2 - \sqrt{3}$

Problème : (12 pts)

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par : $f: x \mapsto arctan\,\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} + 1$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1-a) Montrer que *f est* dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifier que : $\forall x > 0: f'(x) = -\frac{1}{3\left(1+\sqrt[3]{x}^2\right)}$

b) Démontrer que : $\forall x > 0, \exists c_x \in]0, x[: f(x) - f(0) = -\frac{x}{3(1+\sqrt[3]{c_x}^2)}$

c) En déduire que *f* est dérivable à droite en 0 et calculer $f'_d(0)$ puis écrire l'équation de la demi-tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

2) Etudier la branche infinie de *Cf au voisinage de* $+\infty$ *et* tracer *Cf* dans un repère orthonormé.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α , puis vérifier que $\alpha \in]0;1[$

4) Soit (u_n) la suite réelle définie par : $0 < u_0 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < u_n < 1$

b) Vérifier que :$\forall x \in]0;1[: |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}: \ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |\alpha - u_0|$

En déduire que (u_n) converge vers α

e) Démontrer que la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}: S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

converge également, et que sa limite est α.