Lycée Michlifen - Classe : 2ème Bac Sc.Maths.Fr

Prof : OUBIJI

Devoir surveillé N°3 – Durée :2h

Date : le 20 décembre 2022

Problème : (14 pts)

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*: f(x) = \frac{xe^x}{e^x-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est continue en 0

2) Vérifier que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$ et interpréter ces résultats.

3.a) On pose :

$\forall x \in \mathbb{R}^*: \varphi(t) = [e^{-x} + x - 1]t^2 - [e^{-t} + t - 1]x^2$ En appliquant le théorème de Rolle à la fonction φ prouver qu'il existe un réel c compris strictement entre 0 et x tel que :$\frac{e^{-x}+x-1}{x^2} = -\frac{e^{-c}-1}{2c}$

b) En déduire que $\lim_{x\to0} \frac{e^{-x}+x-1}{x^2} = \frac{1}{2}$

4.a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*: \frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x}+x-1}{x^2} f(x)$

b) En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$

5.a) Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^*: f'(x) = \frac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2}$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*: \mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 1 - x > 0$; en déduire le sens de variation de f et tracer la courbe C_f.

6) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 > 0 \ \ et \ \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \ln(f(u_n))$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}: \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) < x$. (Utiliser 5.b))

c) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

d) Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite

Exercice : (6 pts)

1) Montrer que : $\forall x > 0: \frac{1}{1+x} < ln\left(\frac{1+x}{x}\right) < \frac{1}{x}$

2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*: S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: S_n \geq \ln(n+1)$; en déduire que (S_n) est divergente.

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*: \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq ln2$

b) En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.