Lycée Michlifen -AZROU

Classe : 2ème Bac Sc.Maths.Fr

Prof : OUBIJI

Devoir surveillé N°4

Durée :2h - Date : le 10 janvier 2023

Exercice 1 :

On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i$$

1)Montrer que le polynôme $f(z)$ admet un zéro réel a

2) Déterminer les nombres complexes b et c tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = (z-a)(z^2 + bz + c)$$

3) Déterminer les racines carrées complexes du nombre complexe $16 + 30i$

4) En déduire les solutions de l'équation $f(z) = 0$

Dans tout ce qui suit le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Exercice 2 :

On considère l'équation :

$$(E): z \in \mathbb{C}\,; (1-z)^3 = \bar{j}\text{ , où } j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

1) Montrer que les racines cubiques de $\bar{j}$ sont :

$$u_0 = e^{-i\frac{2\pi}{9}}, u_1 = e^{i\frac{4\pi}{9}} \text{ et } u_2 = e^{-i\frac{8\pi}{9}}$$

2) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_0 = 2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)e^{i\frac{7\pi}{18}}, z_1 = 2\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)e^{-i\frac{5\pi}{18}} \text{ et } z_2 = 2\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)e^{i\frac{\pi}{18}}$$

3) Vérifier que $arg\frac{z_0 z_1}{{z_2}^2} \equiv 0\ [2\pi]$ et interpréter ce résultat.

4) Soient A,B,C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 dans le plan complexe.

Vérifier que : $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, en déduire la nature du triangleABC, en déduire que C est l'image de B par une rotation dont on déterminera le centre et la mesure d'angle.

<u>Exercice 3 :</u>

On considère la transformation plane f définie par son expression complexe suivante :

$$z' = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z$$

1.a) Ecrire le nombre $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ sous une forme exponentielle.

b) En déduire la nature de f en précisant ses éléments caractéristiques.

On considère dans la suite le point A_0 d'affixe $z_0 = 6$ et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} = f(A_n)$$

2) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}: z_n = 6.\frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^n} e^{i\frac{n\pi}{6}}$ où z_n est l'affixe du point A_n.

3) Montrer que le point A_{12} est situé sur la demi-droite $[O, \vec{u}\,)$

4) Montrer que $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$, en déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}

5) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} OA_n$

6) On pose $d_n = A_nA_{n+1}$

a) Vérifier que $d_0 = 3$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: d_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} d_n$

c)Calculer d_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

d) Calculer en fonction de n la longueur l_n de la ligne polygonale $L_n = A_0A_1 \dots A_{n-1}A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n$

e) Expliquer comment tracer la ligne polygonale L_n à partir de A_0 sans utiliser les z_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis tracer la ligne L_9 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$