Exercices et problèmes : **Intégrales & étude de suites et de fonctions définies par une intégrale**

Exercice 1

Calculer les intégrales :

$$\int_0^1 x(1-x^2)^{7/3}\,dx;\ \int_0^{-1} x(3x^2-x+1)^2dx;\ \int_0^{-1}\sqrt{1-2x}\,dx\ \int_0^1 \frac{2x+2}{(x+1)^2}dx$$

$$\int_2^1 \frac{t}{(t^2+1)^5}dt\ ;\ \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}dt;\ \int_{-1}^3 |2x-x^2|dx;\ \int_0^1 e^{-x}dx\ ;\ \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan(x)dx\ ;\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\,x\,cos\,x\,dx\ ;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^7 x\,dx\ ;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5 x\,dx\ ;\ \int_0^{\frac{\pi}{8}} sin^2 x\,cos\,2\,xdx$$

Exercice 2

Calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1+t^4}dt$
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2x-\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{1-cost}dt$

Exercice 3

Etudier le signe de l'intégrale :

$$I(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{ln}dt \text{ sur } D=\,]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[.$$

Exercice 4

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 t^{\,2}}{(2+t)^n} dt$$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2. Montrer que la suite (u_n) converge puis calculer sa limite.

Exercice 5

Soit $\alpha > 0$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \int_0^{\alpha} e^{-nt^2} dt$

1-a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*: \int_0^{\frac{1}{ln}} e^{-nt^2} dt \leq \frac{1}{ln\, n}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Prouver que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_0: \frac{1}{ln\, n} < \alpha$

c) Montrer que : $\forall n \geq n_0: 0 < \int_{\frac{1}{ln\, n}}^{\alpha} e^{-nt^2} dt \leq \left(\alpha - \frac{1}{ln}\right) e^{\frac{-n}{ln^2 n}}$

2) Montrer que la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} dx$

1) Calculer u_1

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n), en déduire qu'elle converge.

3) Calculer la limite de la suite (u_n).

(Trouver un encadrement convenable de u_n)

Exercice 7

Intégrer par parties et calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln(1 + \cos x)dx$$

Exercice 8

On considère les 2 intégrales :

$$I = \int_1^e \frac{dt}{t(1+t^2)} \text{ et } J = \int_1^e \frac{2t \ln t}{(1+t^2)^2} dt$$

1) Calculer I en posant $t = \frac{1}{u}$

2) Calculer J en procédant une intégration par parties.

Exercice 9

On pose pour tout réel t distinct de $1 \ et \ de -1$:

$$\varphi(t) = \frac{t^2}{t^2 - 1}$$

1. Vérifier que : $\varphi(t) = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t-1}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t+1}}\right)$

2. En utilisant une intégration par changement de variable, calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x-2} dx$$

(On peut poser : $t = \sqrt{x+1}$)

3.En posant $u = e^{\frac{x}{2}}$, calculer l'intégrale :

$$\int_{2\ln 2}^{4\ln 2} \frac{e^{\frac{3}{2}x}}{e^x - 1} dx$$

Exercice 10

Montrer que les suites numériques suivantes convergent et calculer la limite de chacune de ces suites :

1) $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

2) $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

3) $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 11

On veut calculer l'intégrale : $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\, dx$

1. Vérifier que : $\frac{2y^2}{y^2-1} = 2 - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1}$

2. En intégrant par changement de variable et en posant $y = \sqrt{x^3+1}$, montrer que :

$$I = \frac{1}{3}\left(6 - 2\sqrt{2} - \ln\left(6 - 4\sqrt{2}\right)\right)$$

Exercice 12

On considère les intégrales :

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{arctan\, t}{t} dt\, ; J = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{ln\, t}{1+t^2} dt\, ; K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{sin\, x} dx$$

1) En intégrant par parties montrer que : $I = \frac{\pi}{4} ln\, 3 - J$

2) En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ prouver que J est nulle

3) En posant $t = tg\,\frac{x}{2}$, calculer K.

Exercice 13

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad lnu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

2) En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 14

On considère la fonction$f: x \mapsto \sqrt{1-e^x}$définie sur$]-\infty; 0]$ et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$du plan.

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.

2) Donner le tableau de variation de f et tracer (C).

3) Soit λ un nombre réel strictement négatif. On pose : $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} f(x)dx$

a) En posant $t = f(x)$ montrer que

$$I(\lambda) = \int_{\sqrt{1-e^{\lambda}}}^{0} \frac{2t^2}{t^2-1}dt$$

b) Calculer $I(\lambda)$ en fonction deλ. $\left(\frac{2t^2}{t^2-1} = 2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$

c) Calculer en fonction de λ , **A(λ)** l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C), et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \lambda$ et $y = 1$ (On poser$t = \sqrt{1-e^x}$)

d) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}$ **A(λ)**

Problème 1

Soit Fla fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{ln(1 + t^2)} dt$$

1) Montrer que F est impaire. (On peut poser le changement de variable : $x = -t$)

2-a) Montrer que :

$$\forall x > 0: \frac{x}{ln(1 + 4x^2)} \leq F(x) \leq \frac{x}{ln(1 + x^2)}$$

b) En déduire les limites : $\lim_{x\to 0+} F(x)$; $\lim_{x\to +\infty} F(x)$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.Interpréter les graphiquement

3-a) Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$

b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

c) Etudier les variations de F sur $]0; +\infty[$

4) Donner l'allure de la courbe representative de F dans un repère orthonormé.

(On prendra : $F(\sqrt{2}) \approx 0.8$ et $F(5) \approx 1.3$)

Problème 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-e^x}$ définie sur $]-\infty; 0]$ et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.

2) Donner le tableau de variation de f et tracer (C).

3) Soit λ un nombre réel strictement négatif. On pose : $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} f(x)dx$

a) En posant $t = f(x)$ montrer que

$$I(\lambda) = \int_{\sqrt{1-e^{\lambda}}}^{0} \frac{2t^2}{t^2-1} dt$$

b) Calculer $I(\lambda)$ en fonction de λ. $\left(\frac{2t^2}{t^2-1} = 2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$

c) Calculer en fonction de λ , **A(λ)** l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C), et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \lambda$ et $y = 1$ (On posera $t = \sqrt{1-e^x}$)

d) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty}$ **A(λ)**

Problème 3

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x}; x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\ln x \leq x - 1$; en déduire l'ensemble de définition de f .

2) Montrer que f est continue sur $0; +\infty[$

3) Soit F la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : F(x) = \int_1^x f(t)dt$

Montrer que F est dérivable sur $0; +\infty[$, calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et déterminer les variations de F

4-a) Montrer que $\forall t \in [0; 1]: -1 \leq f(t) \leq t - 1$

b) En déduire que : $\frac{1}{2} \leq F(0) \leq 1$

5) Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

6) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\forall n \in IN^*: u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

7) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*: S_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Problème 4

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(0) = 0 \qquad et \qquad \forall x > 0:\ f_n(x) = x(1 - lnx)^n$$

Soit (C_n) la courbe repésentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie I :

1.a) Montrer que la fonction f_n est continue à droite en 0.

(On posera $x = t^n$)

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite en 0.

c) Etudier les branches paraboliques des courbes (C_1) et (C_2) au voisinage de $+\infty$

2) Vérifier que $\forall x > 0: f_1'(x) = -lnx \ \ et \ \ f_2'(x) = (lnx - 1)(lnx + 1)$ puis donner les tableaux de variations de $f_1 \ et \ f_2$.

3.a) Etudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2)

b) Tracer (C_1) et (C_2) dans le même repère. (On prendra : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$)

Partie II :

Soit F la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par : $F(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

1) Montrer que F est dérivable sur $]-\infty, 0]$ et que : $\forall x \le 0: F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$; en déduire le sens de variations de F sur $]-\infty, 0]$

2.a) Prouver que pour tout $x < 0$ et pour tout $t \in [e^x, 1]$ on a :

$$\frac{1}{2}f_1(t) \leq \frac{f_1(t)}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}f_1(t)$$

b) En déduire que :

$$\forall x < 0: \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt$$

c) ***En intégrant par parties*** montrer que la fonction $x \longmapsto x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{lnx}{2}\right)$ est une

primitive de f_1 sur$]0;+\infty[$

d) En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_{e^x}^{1} f_1(t)dt = \frac{3}{4}$.

e) On admet que F admet une limite finie l.Vérifier que :

$$\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$$

Partie III :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \int_1^e f_n(t)dt$

1.a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n > 0$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante ; en déduire qu'elle converge.

2.a) ***En intégrant par parties*** montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_{n+1} = -\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n$

b) En déduire l'aire ***en cm²*** du domaine du plan délimité par (C_1) et (C_2)et

les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = e$.

3.a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Problème 5 : Irrationnalité du nombre e

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$r_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$$

1.Calculer la valeur de r_0

2.En effectuant une intégration par parties, calculer la valeur de r_1

3. En effectuant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + r_{n+1}$$

4. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n$$

5.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r_n \leq \frac{e}{n!}$ .En déduire que la suite (r_n) converge vers 0.

b) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$

6)On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

7) En raisonnant par l'absurde, on se propose de montrer que le nombre e est irrationnel.

Pour ce faire, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p, q premiers entre eux tels que $e = \frac{p}{q}$

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n < e < v_n$

b) En déduire que : $q!\,u_q < q!\,e < q!\,u_q + \frac{1}{q}$

c) Mettre en évidence une contradiction (noter que $q!\,u_q$ est un nombre entier) et conclure.

Problème 6

Partie I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0; +\infty[: f(x) = \frac{\arctan x}{x}$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I

2) a) Soit x un élément de l'intervalle I, montrer que :

$$\forall t \in [0; x] : \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$

b) Montrer que $\forall x \in I : \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$

c) Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0.

3)a) Sachant que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

b) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

Partie II

1) Soit la fonction g définie sur I par :

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0; +\infty[: g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) \leq g(x) \leq 1$

b) Montrer que g est dérivable à droite en 0.

2) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$

et que $\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - g(x))$

3) Montrer que g est décroissante sur l'intervalle I.

4-a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = 0$

(Remarquer que : $\forall x \in]0; +\infty[: 0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$)

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

Partie III

1) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0; 1[$.

2) a) Vérifier que $\forall x \in I : \ 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-b) de la première partie)

b) Montrer que $\forall x \in I : |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.