TES spé maths **Eléments de correction de l'exercice de spécialité**
Bac Blanc n°2 de Mathématiques **Jeudi 16 Avril 2015**

Calculatrice autorisée - Aucun document n'est autorisé. **Durée : 3 h**

Exercice 3. (5 points) *Pour les élèves ayant choisi l'enseignement de spécialité*

Une société est spécialisée dans la vente en ligne de produits de haute technologie sur Internet.

Partie A

La société réalise tout au long de l'année des journées promotionnelles pour attirer ses clients sur son site Internet. Elle leur envoie un courrier électronique annonçant chaque journée de promotion.

Parmi les clients, 5% d'entre eux ont visité le site Internet de la société lors de la première journée de promotion.

Une étude portant sur le comportement des clients auxquels la société a envoyé ce type de message a mis en évidence que :

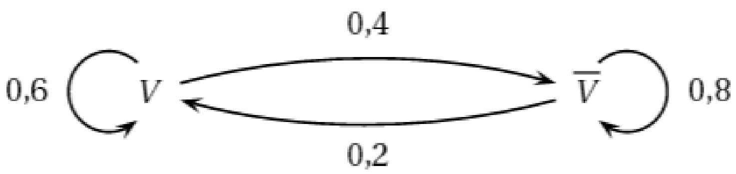
- trois clients sur cinq ayant visité le site Internet lors d'une journée promotionnelle, le visitent à nouveau lors de la journée promotionnelle suivante
- un client sur cinq n'ayant pas visité le site Internet lors d'une journée promotionnelle, le visite lors de la journée promotionnelle suivante.

On choisit au hasard un client ayant reçu le message annonçant la première journée promotionnelle.
On formule l'hypothèse que les comportements des clients observés lors de l'étude n'évoluent pas d'une journée promotionnelle à la suivante.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on note l'état probabiliste ainsi défini par la matrice ligne $P_n = (x_n \quad y_n)$, où x_n désigne la probabilité que le client pris au hasard visite le site internet de la société lors de la *n*-ième journée de promotion.

Pour une journée promotionnelle donnée, on note V, l'événement « le client a visité le site internet lors de la journée promotionnelle »

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste, de sommets V et $\overline{V}$.



2. Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets V et $\overline{V}$ dans cet ordre.

La matrice de transition est donc $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

3. En remarquant que $P_1 = (0,05 \quad 0,95)$, déterminer P_2. Interpréter ce résultat.

$P_2 = P_1 \times M$

Donc $P_2 = (0,05 \quad 0,95) \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,22 \quad 0,78)$

Ceci signifie que durant la seconde journée promotionnelle, 22% des clients ont visité le site Internet.

4. On admet que le taux de visites se stabilise à long terme. Déterminer l'état stable de ce système.

On cherche la matrice $P = (x \quad y)$ telle que $x + y = 1$ et $P \times M = P$

$$(x \quad y) = (x \quad y) \times \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x + y = 1$$

$$(x \quad y) = (0{,}6x + 0{,}2y \quad 0{,}4x + 0{,}8y) \quad \text{et} \quad x + y = 1$$

$$\begin{cases} x = 0{,}6x + 0{,}2y \\ y = 0{,}4x + 0{,}8y \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}4x - 0{,}2y = 0 \\ -0{,}4x + 0{,}2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}4x - 0{,}2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}4x - 0{,}2y = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}2(1 - x) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}6x - 0{,}2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} \\ y = 1 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 1 - x \end{cases}$$

L'état stable de ce graphe probabiliste est donc égal à P tel que : P = $\left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}\right)$

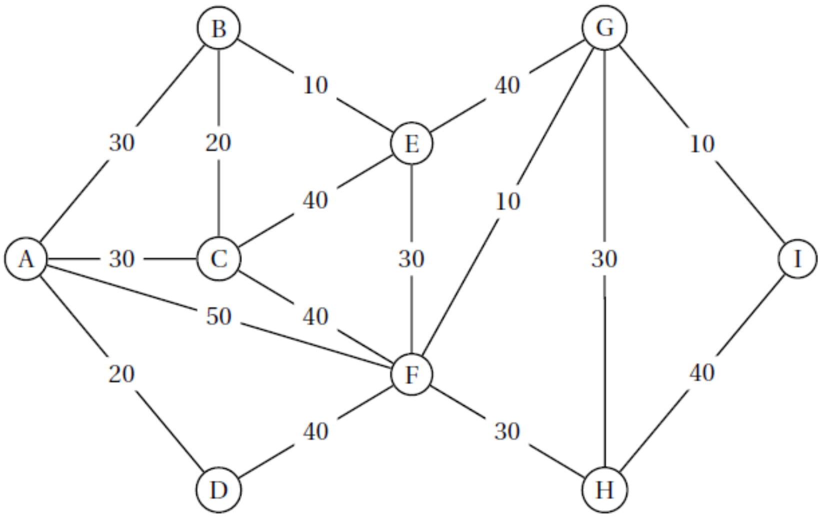
5. Ceci signifie <u>qu'à long terme</u>, la probabilité qu'un client visite le site Internet est $\frac{1}{3}$

Partie B

Le réseau informatique de cette société est constitué d'un ensemble de routeurs interconnectés à l'aide de fibres optiques haut débit.

Le graphe ci-contre schématise l'architecture de ce réseau. Les sommets représentent les routeurs et les arêtes représentent les fibres optiques.

On a fait figurer les durées de transfert des données (en millisecondes notées ms) d'un routeur à un autre sur les fibres optiques du réseau de la société



1. Chaque année, la société doit vérifier l'état physique de la fibre optique installée sur son réseau. Un robot inspecte toute la longueur de la fibre optique afin de s'assurer qu'elle ne présente pas de détérioration apparente.

   Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en suivant les fibres optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois ? Justifier la réponse. Si un tel parcours est possible, préciser par quel(s) routeur(s) du réseau, le robot doit commencer son inspection.

<u>Chercher si l'on peut parcourir l'ensemble du réseau e suivant les fibres optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois revient à chercher si le graphe donné admet une chaîne eulérienne.</u>

Sommets	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
Degrés	**4**	**3**	**4**	**2**	**4**	**6**	**4**	**3**	**2**

Or, d'après le théorème d'Euler, un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il est connexe et admet exactement zéro ou deux sommets de degré impair.

On voit qu'ici le graphe est connexe car il est possible de relier deux sommets quelconques de ce graphe par au moins une chaîne.
De plus, ce graphe comporte exactement deux sommets de degré impair (B et H).

On en déduit donc que ce graphe admet une chaîne eulérienne donc il est possible de parcourir l'ensemble du réseau en suivant les fibres optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois.

De plus les chaînes eulériennes auront pour extrémités les sommets de degré impair. Le robot doit commencer son inspection par B ou H.

2. Un ordinateur, relié au routeur A envoie un paquet de données à un ordinateur relié au routeur I.
Le paquet de données a mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I.
Celui-ci a-t-il emprunté le chemin le plus rapide sur le réseau ? Justifier.
Il s'agit ici de trouver une plus courte chaîne partant du sommet A et arrivant au sommet I.
Pour cela, on utilise l'algorithme de Dijkstra

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
A : 0		30 (A)	30 (A)	20 (A)	∞	50 (A)	∞	∞	∞
D : 20		30 (A)	30 (A)		∞	20 + 40 (A) ~~60(A)~~ 50 (A)	∞	∞	∞
B : 30			30 + 20 (B) ~~50(B)~~ 30 (A)		40 (B)	50 (A)	∞	∞	∞
C : 30					30 + 40 (C) ~~70(C)~~ 40 (B)	30 + 40 (C) ~~70(C)~~ 50 (A)	∞	∞	∞
E : 40						40 + 30 (E) ~~70(E)~~ 50 (A)	80(E)	∞	∞
F : 50							60 (F)	80 (F)	∞
G : 60								60 + 30 (G) ~~90(G)~~ 80 (F)	70 (G)

Il existe donc une plus courte chaîne partant du sommet A et arrivant au sommet I. : AFGI, de longueur 70.
Le paquet de données ayant mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I. Il a bien emprunté le chemin le plus rapide sur le réseau

Remarque : on aurait pu choisir « C : 20 avant de choisir le sommet B. Aurait-on alors pu obtenir un chemin plus court ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
A : 0		30 (A)	30 (A)	20 (A)	∞	50 (A)	∞	∞	∞
D : 20		30 (A)	30 (A)		∞	20 + 40 (A) ~~60(A)~~ 50 (A)	∞	∞	∞
C : 30		30 + 20 (C) ~~50(C)~~ 30 (A)			70 (C)	30 + 40 (C) ~~70(C)~~ 50 (A	∞	∞	∞
B : 30					40 (B)	50 (A)	∞	∞	∞
E : 40						40 + 30 (E) ~~70(E)~~ 50 (A)	80 (E)	∞	∞
F : 50							60 (F)	80 (F)	∞
G : 60								60 + 30 (G) ~~90(G)~~ 80 (F)	70 (G)

Donc il n'y a aucun changement !