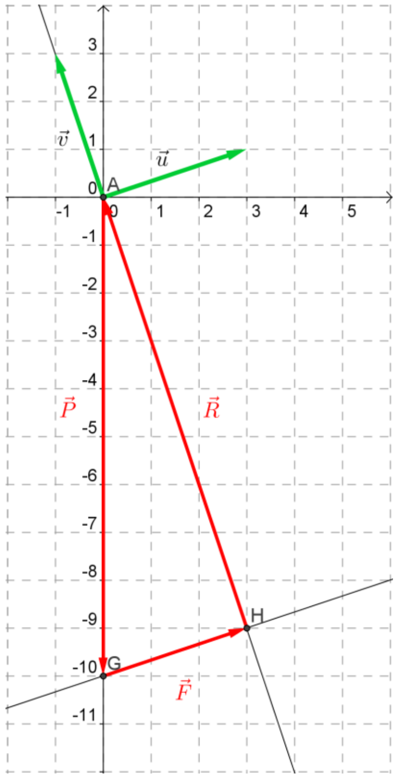
Exercice 1 :

Un solide est placé sur un plan incliné sur lequel il est immobile. En l'absence de frottements, ce solide est soumis à trois forces : son poids, représenté par le vecteur $\overrightarrow{P}$, la réaction du sol $\overrightarrow{R}$ et une force $\overrightarrow{F}$ exercée par un câble qui évite le glissement du solide.

Les trois vecteurs peuvent être représentés dans un plan muni d'un repère orthonormé. $\overrightarrow{P}$ a pour coordonnées (0 ; – 10), $\overrightarrow{R}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$ (– 1 ; 3) et le vecteur $\overrightarrow{F}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ (3 ; 1).

Comme le solide est immobile, $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.



1. Faire une figure

2. Justifier l'existence d'un réel k tel que les coordonnées de $\overrightarrow{R}$ sont (– k ; 3k).

   $\overrightarrow{R}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$ donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{R} = k\,\vec{v}$.

   D'où $\begin{cases} x_{\vec{R}} = k \times x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{R}} = k \times y_{\vec{v}} \end{cases}$ Par conséquent, $\begin{cases} x_{\vec{R}} = k \times (-1) \\ y_{\vec{R}} = k \times 3 \end{cases}$

   c'est-à-dire $\begin{cases} \boldsymbol{x_{\vec{R}} = -k} \\ \boldsymbol{y_{\vec{R}} = 3k} \end{cases}$

3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{F}$.

   $\overrightarrow{F}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ donc il existe un réel k' tel que $\overrightarrow{F} = k'\,\vec{u}$.

   D'où $\begin{cases} x_{\vec{F}} = k' \times x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{F}} = k' \times y_{\vec{u}} \end{cases}$

   Par conséquent, $\begin{cases} x_{\vec{F}} = k' \times 3 \\ y_{\vec{F}} = k' \times 1 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} \boldsymbol{x_{\vec{F}} = 3\,k'} \\ \boldsymbol{y_{\vec{F}} = k'} \end{cases}$

   $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ d'où $\begin{cases} 0 + (-k) + 3k' = 0 \\ -10 + 3k + k' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3k' \\ -10 + 3 \times 3k' + k' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3k' \\ 10k' = 10 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3k' \\ k' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \times 1 \\ k' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k' = 1 \end{cases}$

   Or $\overrightarrow{R}\begin{pmatrix} -k \\ 3k \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{F}\begin{pmatrix} 3\,k' \\ k' \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \times 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{F}\begin{pmatrix} 3 \times 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Conclusion : $\overrightarrow{\mathbf{R}}\begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{9} \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{\mathbf{F}}\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

4. La norme du vecteur $\overrightarrow{F}$ donne l'intensité, en newtons, de la force exercée par le câble. La déterminer.

   $\| \overrightarrow{\mathbf{F}} \| = \sqrt{x_{\vec{F}}^{\,2} + y_{\vec{F}}^{\,2}} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{\mathbf{10}}$

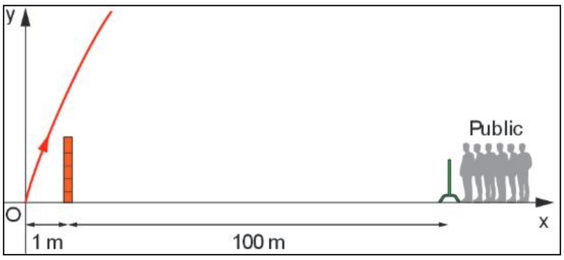
   L'intensité de la force exercée par le câble est donc de $\sqrt{10}$ newtons.

Exercice 2

Les artificiers sont cachés du public par un mur de hauteur 2m, placé à 1m du point de lancement des fusées du feu d'artifice. Le public est à 100m du mur, derrière des barrières de sécurité.

La trajectoire est un morceau de la parabole d'équation $y = -\frac{50}{v_0^{\,2}}x^2 + 3x$

où v_0 est la vitesse de lancement en m.s^{-1}.



Les longueurs sont en mètres.

La fusée doit passer au-dessus du mur et retomber, en cas de non explosion en l'air, avant les barrières de sécurité.

1. La vitesse initiale v_0 peut-elle être égale à :

a) 5 m.s^{-1}

$y = -\frac{50}{5^2}x^2 + 3x = -2x^2 + 3x$

La hauteur de la fusée à un mètre de son point de lancement est : $f(1) = -2 \times 1^2 + 3 \times 1 = 1$

où f est la fonction polynôme de degré 2 modélisant la trajectoire.

Donc 1 mètre après son point de lancement, la fusée a une hauteur de 1 mètre : **elle ne passera donc pas au-dessus du mur.**

b) 50 m.s^{-1}

$y = -\frac{50}{50^2}x^2 + 3x = -\frac{1}{50}x^2 + 3x$

$f(1) = -\frac{1}{50} \times 1^2 + 3 \times 1 = 2{,}98$

Donc 1 mètre après son point de lancement, la fusée a une hauteur de 2,98 mètres : **elle passera donc au-dessus du mur.**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(-\frac{1}{50}x + 3\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{50}x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{50}x = -3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3 \times (-50) = 150$$

La fusée retombera donc à 150 mètres de son point de lancement. **Elle retombe donc derrières les barrières de sécurité** qui se trouvent à 101 mètres du point de lancement.

c) 25 m.s^{-1} ?

$y = -\frac{50}{25^2}x^2 + 3x = -\frac{2}{25}x^2 + 3x$

$f(1) = -\frac{2}{25} \times 1^2 + 3 \times 1 = 2{,}92$

Donc 1 mètre après son point de lancement, la fusée a une hauteur de 2,92 mètres : **elle passera donc au-dessus du mur.**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{25}x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(-\frac{2}{25}x + 3\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{2}{25}x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{2}{25}x = -3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3 \times \left(-\frac{25}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 37{,}5$$

La fusée retombera donc à 37,5 mètres de son point de lancement. **Elle retombe avant les barrières de sécurité** qui se trouvent à 101 mètres du point de lancement.

2. Quelles sont les vitesses initiales possibles ?

- Pour que la fusée passe au dessus du mur : $f(1) > 2 \Leftrightarrow -\dfrac{50}{v_0^{\,2}} \times 1^2 + 3 \times 1 > 2$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{50}{v_0^{\,2}} > -1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{50}{v_0^{\,2}} < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 50 < v_0^{\,2} \qquad \text{car } v_0^{\,2} \text{ est positif}$$
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sqrt{50} < v_0} \qquad \text{car } v_0 \text{ est positif}$$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{50}{v_0^{\,2}} x^2 + 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(-\frac{50}{v_0^{\,2}} x + 3\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{50}{v_0^{\,2}} x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{50}{v_0^{\,2}} x = -3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3 \times \left(-\frac{v_0^{\,2}}{50}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3v_0^{\,2}}{50}$$

Pour que la fusée retombe avant les barrières : $\dfrac{3v_0^{\,2}}{50} < 101 \Leftrightarrow 3v_0^{\,2} < 5\,050$

$$\Leftrightarrow v_0^{\,2} < \frac{5\,050}{3}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \boldsymbol{v_0 < \sqrt{\frac{5\,050}{3}}} \qquad \text{car } v_0 \text{ est positif}$$

- Si on regroupe les 2 conditions, on obtient : $\boldsymbol{\sqrt{50} < v_0 < \sqrt{\dfrac{5\,050}{3}}}$

  Soit v_0 doit être compris entre 7,1 m.s^{-1} et 41,0 m.s^{-1}.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition et le sens de variation des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2 - \dfrac{3}{\sqrt{x} + 1}$ $\quad\sqrt{x}$ est défini sur $[0\ ;+\infty[$, donc la fonction **f est définie sur $[0\ ;+\infty[$.**

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$	**Justifications**
Variation de $x \mapsto \sqrt{x}$	0 ↗	La fonction Racine carrée est strict. croissante
Variation de $x \mapsto \sqrt{x}+1$	1 ↗	f et $f + k$ ont les mêmes variations
Variation de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$	1 ↘	f et $\dfrac{1}{f}$ ont des variations contraires
Variation de $x \mapsto \dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}$ $(-3 < 0)$	-3 ↗	Si $k < 0$, f et $k \times f$ ont des variations contraires
Variation de $x \mapsto 2 - \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$	-1 ↗	f et $f + k$ ont les mêmes variations

2. $g(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{x^2 + x - 20}}$

Commençons par étudier les variations et le signe du polynôme $x^2 + x - 20$:

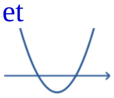
$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 81$

Le polynôme $x^2 + x - 20$ admet donc 2 racines réelles :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ et $\quad$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-1-9}{2}$ $\quad$ et $\quad$ $x_2 = \dfrac{-1+9}{2}$

$x_1 = -5$ $\quad$ et $\quad$ $x_2 = 4$

De plus **a > 0** (a = 2), donc  donc **g est définie sur $]-\infty\ ;-5[\ \cup\ ]4\ ;+\infty[$**

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2}$ $\quad$ et $\beta = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 20 = -20{,}25$

x	$-\infty$	-5	$-\dfrac{1}{2}$	4	$+\infty$	
Variation de $x \mapsto x^2 + x - 20$	↘	0	$-20{,}25$	0	↗	
Variation de $x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 20}$	↘	0	Non définie	0	↗	f et $\sqrt{f}$ ont les mêmes variations
Variation de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x - 20}}$	↗	‖	Non définie	‖	↘	f et $\dfrac{1}{f}$ ont des variations contraires
Variation de $x \mapsto \dfrac{-3}{\sqrt{x^2 + x - 20}}$ $(-3 < 0)$	↘	‖	Non définie	‖	↗	Si $k < 0$, f et $k \times f$ ont des variations contraires