1S3 Durée : 1 h 40	**Corrigé du D.S. n°3 de Mathématiques**	Le 18 décembre 2015 **Calculatrice autorisée**

Le barème est donné à titre indicatif sur 50 points.

EXERCICE 1 (6,5 points) **PROBABILITÉS**

Les deux frères BOLA, Tim et Tom, ont chacun organisé une tombola.

Tim propose 100 billets, dont 30 sont gagnants, parmi lesquels figurent : 1 lot de 250 €, 4 lots de 50 € et 25 lots de 2 €.

Tom propose également 100 billets, mais annonce 50 gagnants : 5 lots de 20 €, 10 lots de 15 €, 15 lots de 10 € et 20 lots de 5 €.

Dans chaque tombola, le prix du billet est de 5 €.

Soit X et Y les gains algébriques respectifs liés à l'achat d'un billet chez Tim et Tom.

1. Déterminer la loi de probabilité de X (tombola de Tim).

Loi de probabilité de X :

x_i	-5	-3	45	245
p_i	0,70	0,25	0,04	0,01

2. a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter.

$\mathbf{E(X)} = -5 \times 0{,}7 + (-3) \times 0{,}25 + 45 \times 0{,}04 + 245 \times 0{,}01 = \mathbf{0}$

E(X) = 0, donc le jeu que propose Tim est équitable.

b) Calculer la variance et l'écart-type de X.

$\mathbf{V(X)} = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i^2 - (E(X))^2 = 0{,}7 \times (-5)^2 + 0{,}25 \times (-3)^2 + 0{,}04 \times 45^2 + 0{,}01 \times 245^2 - 0^2$

$\mathbf{V(X) = 701}$

$\mathbf{\sigma(X)} = \sqrt{\mathbf{V(X)}} = \sqrt{701} \approx \mathbf{26{,}48}$

c) On donne E(Y) = 0 et σ(Y) ≈ 6,12 (tombola de Tom). Que pourrait-on conseiller à Eva, qui hésite entre Tim et Tom, sachant qu'elle n'a pas le gout du risque.

σ(X) > σ(Y) donc les gains sont plus proches de l'espérance (qui est la même pour les 2 tombolas) dans la tombola de Tom.

De plus, $P(X \geq 0) = \dfrac{5}{100} = 0{,}05$ et $P(Y \geq 0) = \dfrac{50}{100} = 0{,}5$

On a donc plus de chance de ne pas perdre d'argent avec la tombola de Tom.

Il est donc préférable de choisir le jeu de Tom.

EXERCICE 2 (7,5 *points*) **STATISTIQUES.**

Un directeur de supermarché décide d'étudier le temps d'attente aux caisses de son établissement pour ajuster le nombre de caisses ouvertes à la demande.

Pour cela, il interroge le lundi et le vendredi 100 clients et note les temps d'attente approximatifs en minutes entières.

1. Le lundi, il obtient la répartition suivante :

Temps d'attente en caisse (en min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de clients	14	13	23	9	14	8	12	4	1	2

a) Calculer le temps moyen d'attente aux caisses du supermarché pour l'échantillon étudié.

$\bar{x} = \dfrac{1\times 14 + 2\times 13 + 3 \times 23 + 4 \times 9 + \ldots + 10 \times 2}{14 + 13 + 23 + 9 + \ldots + 2} = \dfrac{408}{100} = 4{,}08$

Le temps moyen d'attente aux caisses du supermarché pour l'échantillon étudié est de 4,08 minutes.

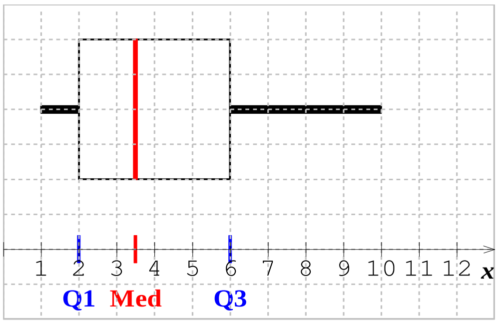
b) Déterminer la médiane et les 1er et 3ème quartiles de la série statistique des temps d'attente. (Justifier soigneusement les réponses.)

$\dfrac{N}{2} = 50$ donc **la médiane est la demi-somme de la 50ème et la 51ème valeur** : **Med** = $\mathbf{\dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5}$

$\dfrac{N}{4} = 25$ donc **le 1er quartile est la 25ème valeur de la série** : $\mathbf{Q_1 = 2}$

$\dfrac{3N}{4} = 75$ donc **le 3ème quartile est la 75ème valeur de la série** : $\mathbf{Q_3 = 6}$

c) Construire le diagramme en boîte de cette série.



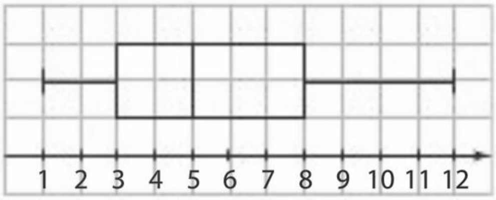
d) Le directeur décide d'ouvrir une caisse supplémentaire si plus de 15% des clients attendent 7 minutes ou plus en caisse. Doit-il ouvrir une nouvelle caisse le lundi ?

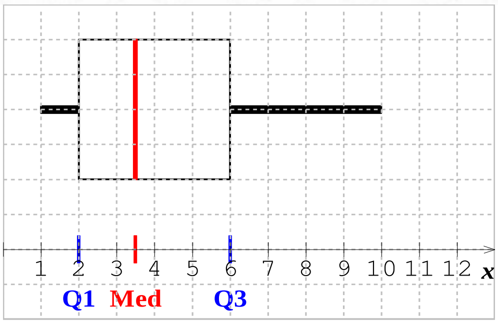
12 + 4 + 1 + 2 = 19.

19 clients attendent 7 minutes ou plus en caisse **soit 19% des clients**,

donc **le directeur doit ouvrir une nouvelle caisse le lundi**.

2. Le directeur souhaite comparer les deux échantillons du lundi et du vendredi.
Voici le diagramme en boîte de la série des temps d'attente aux caisses le vendredi.
Comparer, à l'aide des diagrammes en boîte, les temps d'attente le lundi et le vendredi.

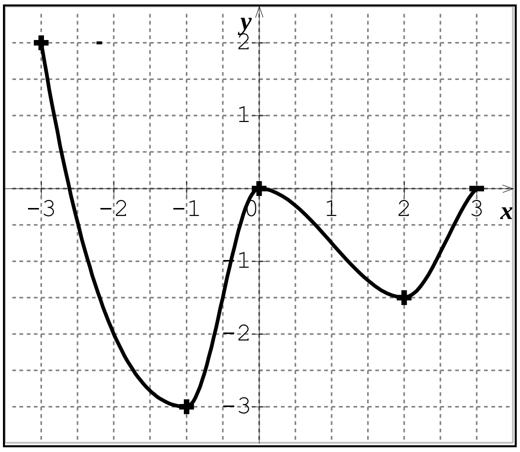




La boîte est plus étroite le lundi que le vendredi. Cela montre que les temps d'attente sont réguliers, et comme elle est située plus à gauche du graphique, ils sont aussi dans l'ensemble plus courts.

EXERCICE 3 (8 *points*) **FONCTIONS**

f est une fonction définie sur l'intervalle [–3 ; 3] représentée ci-contre.



On note *g* et *h* les fonctions définies sur [–3 ; 3] par :

$g(x) = f(x) + 3$ et $h(x) = -2 f(x)$.

Compléter ci-dessous les tableaux de variation des fonctions *f*, *g* et *h*.

x	**−3**	**−1**	**0**	**2**	**3**
Variations de *f*	**2** ↘	**−3** ↗	**0** ↘	**−1,5** ↗	**0**
Variations de *g*	**5** ↘	**0** ↗	**3** ↘	**1,5** ↗	**3**
Variations de *h*	**− 4** ↗	**6** ↘	**0** ↗	**3** ↘	**0**

EXERCICE 4 (9,5 points) **FONCTIONS**

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2 - 4x + 3$

1. a) Déterminer les racines de u ainsi que les coordonnées du sommet de la parabole représentative de u.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3$$

Les racines de *u* sont donc 1 et 3.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \beta = u(\alpha) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$$

Le sommet de la parabole représentative de *u* a pour coordonnées (2 ; −1)

b) Dresser le tableau de variations de u.

$a = 1$, $a > 0$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Variations de u		↘	0	↘	-1	↗	0	↗	

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$.
Déterminer l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variation.

f est définie si et seulement si $u(x) \geq 0$.

L'ensemble de définition de *f* est donc $]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$.

Si u est positive sur I, u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur I.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Variations de u		↘	0	↘	-1	↗	0	↗	
Variations de f		↘	0	Non définie	Non définie	Non définie	0	↗	

3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{u(x)}$.
Déterminer l'ensemble de définition de g et dresser son tableau de variation.

g est définie si et seulement si $u(x) \neq 0$.

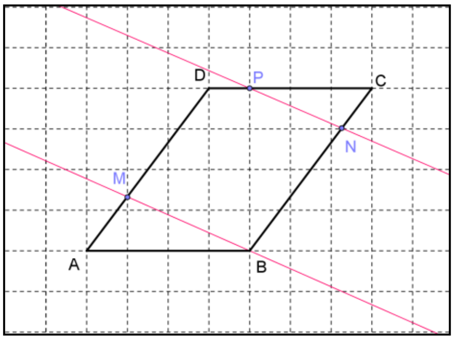
L'ensemble de définition de *g* est donc $]-\infty ; 1[\cup]1 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ ou $\mathbb{R} - \{1 ; 3\}$.

Si u est de signe constant sur I, u et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires sur I.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Variations de u		↘	0	↘	-1	↗	0	↗	
Variations de g		↗	‖	↗	-1	↘	‖	↘	

EXERCICE 5 (6,5 points) **VECTEURS.**

ABCD est un parallélogramme.



1. Placer sur la figure ci-contre, les points M, N et P tels que :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ $\qquad \overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ $\qquad \overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

2. Exprimer $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{PN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$ (relation de Chasles)

$\boldsymbol{\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}}$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{PN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

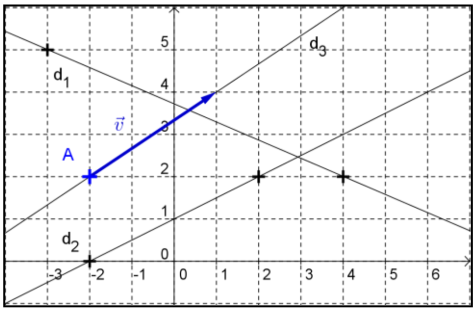
$\boldsymbol{\overrightarrow{PN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}}$ (ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$)

3. Démontrer que (BM) et (PN) sont parallèles.

Dans la base ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$), $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$. $\quad x_{\overrightarrow{BM}} \times y_{\overrightarrow{PN}} - y_{\overrightarrow{BM}} \times x_{\overrightarrow{PN}} = -1 \times \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

Les vecteurs **$\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont donc colinéaires**. Par conséquent, **les droites (BM) et (PN) sont parallèles.**

EXERCICE 6 (12 points) **ÉQUATIONS DE DROITES.** **LES QUESTIONS DE CET EXERCICES SONT INDÉPENDANTES**



1. Par lecture graphique, donner un vecteur directeur pour chacune des droites d_1 et d_2 représentées dans le repère ci-contre.

$\vec{u}_1\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ **est un vecteur directeur de d_1.**

$\vec{u}_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ **est un vecteur directeur de d_2.**

2. Dans le repère ci-contre, représenter la droite d_3 passant par le point A(– 2 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

3. Le point B (2 ; – 1) appartient-il à la droite d_4 d'équation cartésienne : $4x + 3y - 5 = 0$? Justifier.

$\mathbf{4x_B + 3y_B - 5} = 4 \times 2 + 3 \times (-1) - 5 = 8 - 3 - 5 = \mathbf{0}$ donc $\mathbf{B \in d_4}$.

4. Déterminer une équation cartésienne puis l'équation réduite de la droite d_5 passant par le point C (– 2 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

$M(x\,;y) \in d_5 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow (x+2) \times 3 - (y-3) \times (-1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 6 + y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3x + y + 3 = 0$ **Une équation cartésienne de d_5 est : $3x + y + 3 = 0$.**

$3x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3x - 3$ **L'équation réduite de d_5 est : $y = -3x - 3$.**

5. Donner un vecteur directeur de la droite d_6 d'équation cartésienne $5x + 4y + 1 = 0$.

Un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ donc $\boldsymbol{\vec{u}_6\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}}$.

6. Déterminer une équation de la droite d_7 passant par le point D (1 ; 1) et parallèle à la droite d'équation cartésienne $-4x + 2y - 5 = 0$.

Un vecteur directeur de la droite d'équation $-4x + 2y - 5 = 0$ est $\boldsymbol{\vec{u}_7\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}}$.

Comme d_7 est parallèle à la droite d'équation cartésienne $-4x + 2y - 5 = 0$, $\vec{u}_7$ est aussi un vecteur directeur de d_7.

$M(x\,;y) \in d_7 \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_7\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow (x-1) \times (-4) - (y-1) \times (-2) = 0$

$\Leftrightarrow -4x + 4 + 2y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow -4x + 2y + 2 = 0$

Autre méthode : d_7 est parallèle à la droite d'équation cartésienne : $-4x + 2y - 5 = 0$, une équation cartésienne de la droite d_7 est donc : $-4x + 2y + c = 0$, avec c réel.
La droite d_7 passe par le point D (1 ; 1) donc
$-4 \times 1 + 2 \times 1 + c = 0$, soit $\mathbf{c = 2}$

Une équation cartésienne de d_7 est : $-4x + 2y + 2 = 0$.