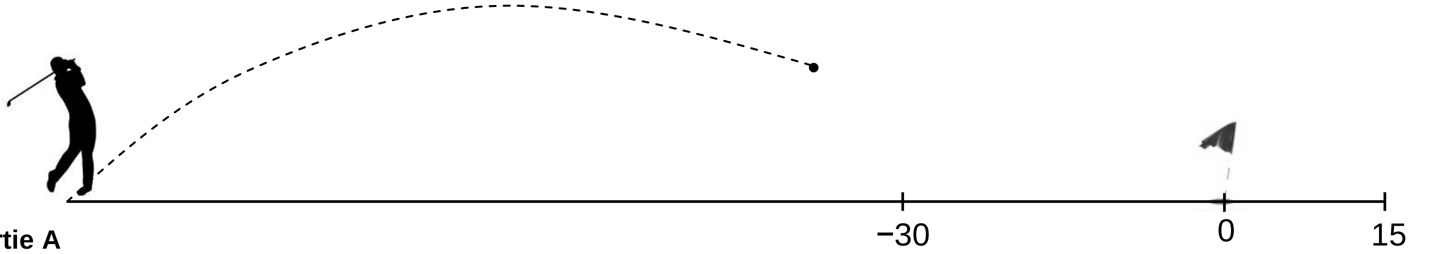
TS :	Eléments de correction de l'accompagnement Personnalisé n°17
	Soutien : Probabilités

<u>Objectifs visés ce jour</u> : probabilités conditionnelles, événements indépendants
schéma de Bernoulli et loi binomiale
loi de densité de probabilité, loi uniforme sur [a ;b]

<u>Problème de synthèse :</u>

Franck pratique régulièrement le golf. Lors d'un entraînement, il a effectué un nombre conséquent de coups à partir du même endroit. Dans le but de se perfectionner, il a relevé pour chaque coup la position de sa balle par rapport à l'objectif visé. Il est naturellement supposé qu'à chaque coup, la balle suit un mouvement rectiligne. Les distances relevées varient de −30 m (la balle est *devant* l'objectif visé, à 30 mètres de celui-ci) jusqu'à 15 m (la balle a dépassé l'objectif visé de 15 mètres)comme le montre le dessin ci-dessous.



Partie A

On considère la variable aléatoire X qui à chaqueballe lancée par Franck associe sa position par rapportà l'objectif visé. On admet que cette variable aléatoire Xsuit une loi uniforme sur l'intervalle [−30 ; 15].

1. Quelle est la probabilité que Franck place sa balle *devant* l'objectif visé, à plus de cinq mètres de ce dernier ?

$P(-30 \leq X \leq -5) = \frac{-5-(-30)}{15-(-30)} = \frac{25}{45} = \mathbf{\frac{5}{9}}$

2. Franck a frappé fortement la balle. Quelle est la probabilitéque cette balle soit *derrière* l'objectif visé ?

$P(X \geq 0) = \frac{15}{45} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Endonner une interprétation.

$E(X) = \frac{-30+15}{2} = -\frac{15}{2} = \mathbf{-7{,}5}$ **Sur un très grand nombre de lancers, la balle sesituera, en moyenne, *devant* l'objectif visé à unedistance de 7,5 mètres.**

4. Lors d'une compétition, Franck est certain de gagners'il place sa balle à au plus cinq mètres du trou. Quelleest la probabilité qu'il gagne la partie ?

$P(-5 \leq X \leq 5) = \frac{10}{45} = \mathbf{\frac{2}{9}}$

Partie B

Après s'être longuement entraîné en vue d'une compétition, Franck estime qu'il a 40% de chances de placer sa balle à au plus 5 m du trou et que dans ce cas, il aura 90% de chance de gagner la partie.

S'il n'y parvient pas, il pense qu'il gagnera la partie dans seulement 20% des cas.
On note :

- A l'évènement : « Franck place la balle à au plus 5 m du trou » ;
- G l'évènement : « Franck gagne la partie ».

1. Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a)** Calculer $p(A \cap G)$.

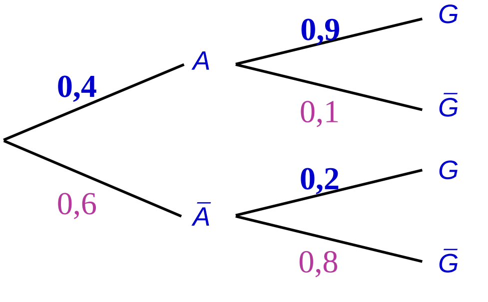
$\mathbf{p(A \cap G) = p(A) \times p_A(G) = 0{,}4 \times 0{,}9 = 0{,}36}$

b) Montrer que la probabilité que Franck gagne la partie est égale à 0,48

A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$p(G) = p(A \cap G) + p(\bar{A} \cap G) = p(A) \times p_A(G) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(G)$

$\mathbf{p(G) = 0{,}36 + 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}36 + 0{,}12 = 0{,}48}$



c) Franck a gagné la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait placé sa balle à plus de 5 m du trou ?

$p_G(\bar{A}) = \dfrac{p(\bar{A} \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}48} = 0{,}25$

3. Franck joue 10 parties. On suppose que le nombre de parties est suffisamment grand pour assimiler ces parties à des tirages successifs indépendants avec remise. On note X le nombre de parties gagnées par Franck.

On note p la probabilité que la partie jouée soit gagnée : $p = 0{,}48$.

a) Quelle loi suit la variable aléatoire X ?

Une partie jouée constitue une épreuve de Bernouilli, de probabilité de succès p. On répète de façon identique et indépendante cette épreuve 10 fois, on obtient donc un schéma de Bernouilli.

Par conséquent **le nombre de succès X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,48.**

b) Calculer la probabilité que Franck gagne exactement 2 parties. On donnera une valeur arrondie à 10^{-3} près.

$p(X = 2) = \binom{10}{2} p^2 (1 - p)^{10-2} = 45 \times 0{,}48^2 \times (1 - 0{,}48)^8 = 45 \times 0{,}48^2 \times 0{,}52^8 \approx \mathbf{0{,}055}$

4. Franck joue n parties. On suppose que le nombre de parties est suffisamment grand pour assimiler ces parties à des tirages successifs indépendants avec remise.
Combien de parties doit-il jouer pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9999 ?

X suit donc ici la loi binomiale de paramètres n et 0,48.

On cherhce n tel que : $p(X \geq 1) \geq 0{,}9999$

$1 - p(X=0) \geq 0{,}9999$

$1 - 0{,}52^n \geq 0{,}9999$

$-0{,}52^n \geq -0{,}0001$

$0{,}52^n \leq 0{,}0001$

$\ln 0{,}52^n \leq \ln 0{,}0001$ **(car ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$**

$n \times \ln 0{,}52 \leq \ln 0{,}0001$

$n \geq \dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}52}$ **(car ln 0,52 est strictement négatif : ORDRE INVERSE)**

or $\dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}52} \approx 14{,}1$ donc $\mathbf{n \geq 15}$

Franck doit donc jouer au minimum 15 parties pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9999

Exercices indépendants :

1. *(d'après livre Odyssée TS)*
Deux copains, Axel et Matthieu se connectent en réseau pour jouer en réseau.
Matthieu ponctuel se connecte chaque soir à 19h tandis qu'Axel se connecte de manière aléatoire entre 19h et 19h30.
   a) Quelle est la probabilité qu'un soir, Matthieu attende plus de 10 minutes ?
   b) Un soir, Matthieu attend depuis 20 minutes. Agacé, il décide de se déconnecter dans les deux minutes qui suivent, si Axel n'est toujours pas connecté.
   Quelle est la probabilité qu'Axel et Matthieu jouent ensemble de soir-là ?

X : variable aléatoire qui à un jour choisi au hasard associe le temps exprimé en minutes que Matthieu attend le soir pour jouer en réseau avec Axel. X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;30]$.

a. $P(X \geqslant 10) = P(10 \leqslant X \leqslant 30) = (30-10) \times \dfrac{1}{(30-0)} = \dfrac{2}{3}$.

b. $$P_{X\geqslant 20}(X \leqslant 22) = \frac{P(20 \leqslant X \leqslant 22)}{P(X \geqslant 20)} = \frac{P(20 \leqslant X \leqslant 22)}{P(20 \leqslant X \leqslant 30)} = \frac{\dfrac{22-20}{30-0}}{\dfrac{30-20}{30-0}} = \frac{2}{10} = 0{,}2.$$

2. *(d'après livre Symbole TS)*
On considère une expérience aléatoire consistant à prélever un nombre au hasard dans [– 2 ;8].
   a) On tire un nombre au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit négatif ?
   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre prélevé.
   X suit la loi uniforme sur [– 2 ;8].
   On cherche : $p(X \leq 0) = p([-2 \leq X \leq 0) = \dfrac{0-(-2)}{8-(-2)} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$
   b) On tire 10 nombres au hasard dans des conditions identiques et indépendantes.
   On est en présence d'un schéma de Bernoulli.
   X la variable aléatoire donnant le nombre de réels négatifs . X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{5}$, donc de paramètres 10 et 0,2
      - Quelle est la probabilité que ces 10 réels soient négatifs ?
      $P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0{,}2^{10} \times (1-0{,}2)^{10-10} = 0{,}2^{10} = 1{,}024 \times 10^{-7}$
      - Quelle est la probabilité que la moitié d'entre eux soient négatifs ?
      $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0{,}2^{5} \times (1-0{,}2)^{10-5} = 252 \times 0{,}2^5 \times 0{,}8^5 \approx 0{,}0264$
      - Quelle est la probabilité que ces 10 réels soient positifs ?
      $P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0{,}2^{0} \times (1-0{,}2)^{10-0} = 1 \times 0{,}8^{10} \approx 0{,}1074$

3. *(d'après livre Transmath TS)*
Une urne contient 5 boules blanches et cinq boules noires. On en prélève n (n ≥ 2) au hasard et successivement, avec remise.
   a) Calculer les probabilités des événements suivants :
      - Toutes les boules tirées sont de même couleur
      - On obtient exactement une boule blanche
   b) On considère les événements suivants :
   A : « on obtient des boules de deux couleurs »
   B : « on obtient au plus une boule blanche »
   En déduire les probabilités suivantes : $p(A \cap B) = \dfrac{n}{2^n}$, $p(A) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$, $p(B) = \dfrac{n+1}{2^n}$
   c) Prouver que A et B sont indépendants
   d) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n ≥ 2 par $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$

- Calculer les trois premiers termes de cette suite
- Prouver que cette suite est strictement croissante.

e) Déduire alors la valeur de n pour que A et B soient indépendants.

1. a) On note C l'événement : « toutes les boules tirées sont de la même couleur » et B_1 l'événement : « on obtient exactement une boule blanche ».

C est réalisé par le tirage avec remise, soit de n boules blanches, soit de n boules noires.

Donc $P(C)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

B_1 signifie tirage de $n-1$ boules noires et d'une boule blanche.

Il existe n listes de résultats comprenant $n-1$ boules noires et 1 boule blanche:

$$\left.\begin{array}{l} -B-N-N-\ldots-N \\ -N-B-N-\ldots-N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -N-N-N-\ldots-B \end{array}\right\} n \text{ listes}.$$

Donc $P(B_1)=n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{1}{2}=n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) • $A=\overline{C}$ donc $P(A)=1-P(C)$.

Ainsi $P(A)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1-\frac{1}{2^{n-1}}$.

• B signifie :

- soit le tirage de n boules noires (0 boule blanche) ;
- soit le tirage d'exactement une boule blanche (événement B_1).

Donc $P(B)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n+1}{2^n}$.

• $A\cap B$ n'est autre que l'événement B_1.

Ainsi $P(A\cap B)=P(B_1)=n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n}{2^n}$.

2. A et B indépendants signifie que :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Cette condition équivaut successivement à:

$$\frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n+1}{2^n}$$

$$n = \left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right)(n+1)$$

$$2^{n-1}n = \left(2^{n-1}-1\right)(n+1)$$

$$2^{n-1}n = 2^{n-1}n + 2^{n-1} - n - 1$$

$$2^{n-1} = n+1.$$

3. a) $u_2 = -1$; $u_3 = 0$; $u_4 = 3$.

b) Pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_{n+1} - u_n = 2^n - (n+2) - \left(2^{n-1} - (n+1)\right)$$

$$= 2^n - 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1}(2-1) - 1$$

$$= 2^{n-1} - 1.$$

Or $n \geq 2$ donc $2^{n-1} \geq 2$ d'où $2^{n-1} - 1 \geq 1 > 0$.
Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

c) D'après **2.,** les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $u_n = 0$.
Or d'après la question **3.**, la seule valeur de n pour laquelle $u_n = 0$ est n= 3 donc :
« A et B indépendants » équivaut à « $n = 3$ ».