$\mathcal{T.S}$ Eléments de correction des exercices d'entrainement TS : vacances d'avril

----

Chapitres	Thèmes	Annabac
Espace	QCM	page 239/240 n°101
		page 84 exercice 2
	Pyramide, construction géométrique, représentation paramétrique d'une droite, équation cartésienne d'un plan	page 26, exercice 1
Fonctions avec intégrales	e^u, ln u montrer que F est une primitive de f sur I, valeur moyenne	page 162 n°32
	e^u, aire entre deux courbes	page 176 n°41
Suites et intégrales		page 151 n°24
	avec algorithme	page 152 n°25
Nombres complexes	Equations et ROC	page 225 n°87

ESPACE : page 239/240 n°101 Antilles Guyane Juin 2013

1. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.
Par l'absurde : si (IJ) et (EC) étaient coplanaires, alors, le point J appartiendrait au plan (ECI) c'est-à-dire au plan (ECA), ce qui est faux.

2. La bonne réponse est $\boxed{\text{c}}$.
Dans le repère mentionné dans le sujet, on a $\overrightarrow{AF}\,(1\,;\,0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{BG}\,(0\,;\,1\,;\,1)$, d'où
$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0+0\times 1+1\times 1 = 1$.

3. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$. On le vérifie en injectant les coordonnées des points A, F et H dans l'équation $x+y-z=0$.

4. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.
Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$, or $\overrightarrow{EC}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$. Par conséquent $\overrightarrow{EC}$ est normal à $\mathscr{P}$, et comme $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{EL}$ est de ce fait aussi normal à $\mathscr{P}$.

5. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$.
On a $\overrightarrow{EC}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$ et $E(0\,;\,0\,;\,1)$; une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$. Le point L a donc pour coordonnées $L(t\,;\,t\,;\,1-t)$, et comme $L\in\mathscr{P}$ alors : $t+t-(1-t)=0$ d'où l'on tire $t=\frac{1}{3}$, c'est-à-dire $L\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$, d'où le résultat.

ESPACE page 84 exercice 2 Amérique du Sud Nov 2014

1. b.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A(2 ; 5 ; −1), B(3; 2; 1) et C(1 ; 3 ; −2).

$AB^2 = (3-2)^2 + (2-5)^2 + (1+1)^2 = 1+9+4 = 14$

$AC^2 = (1-2)^2 + (3-5)^2 + (-2+1)^2 = 1+4+1 = 6$

$BC^2 = (1-3)^2 + (3-2)^2 + (-2-1)^2 = 4+1+9 = 14$

Donc le triangle ABC est isocèle non rectangle.

2. c.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point A(2; 5; −1).

Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}(2; -1; 3)$, donc toute droite perpendiculaire au plan P aura un vecteur directeur colinéaire au vecteur $\vec{n}$, ce qui élimine les propositions **a.** et **b.**

On cherche si le point A appartient à la droite dont la représentation paramétrique est en **c.**; on résout le système : $\begin{cases} 2 = 6-2t \\ 5 = 3+t \\ -1 = 5-3t \end{cases}$

Ce système a pour solution $t = 2$ donc la bonne réponse est **c.**

3. c.

Soit A et B deux points distincts du plan.

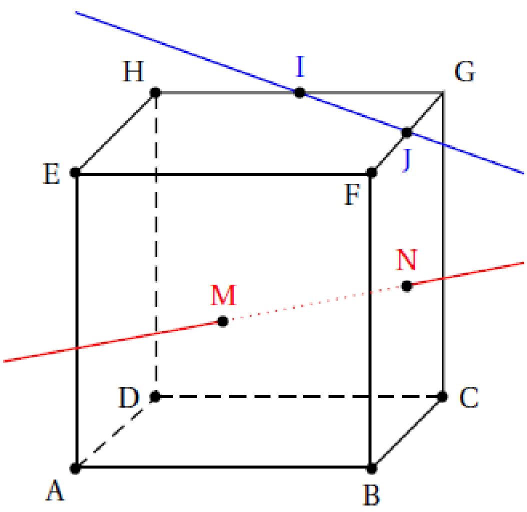
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \iff MAB$ est un triangle rectangle en M

$\iff M$ appartient au cercle de diamètre [AB]

4. c.

La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.

Les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales; il suffit pour s'en convaincre de regarder le cube du dessus :



Choisissons le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ Les points I, J, M et N ont respectivement comme coordonnées :

$\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$, $\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

I et J ont la même cote : ils appartiennent au plan d'équation $z = 1$;

M et N ont la même cote : ils appartiennent au plan d'équation $z = \frac{1}{2}$. Ces deux plans sont parallèles et distincts, donc les droites (IJ) et (MN) ne sont ni perpendiculaires ni sécantes. Les réponses **a.** et **b.** sont fausses.

On a $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ et $\overrightarrow{MN}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$; ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (IJ) et (MN) ne sont pas parallèles. La reponse **d.** est fausse.

Or $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$: les vecteurs sont orthogonaux et les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales. Réponse **c.**

ESPACE p 26 exercice 1 Amérique du Nord Juin 2015

Partie A

1. On peut utiliser ici le théorème de Thalès pour prouver que $\overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS}$ et ainsi construire le point. Pour cela considérons le triangle SOB.
   Nous savons que (DU) est parallèle à (OB) car D et U partagent la même cote et O et B sont également de même cote. Nous savons également que $\frac{OD}{OS} = \frac{1}{3}$, là encore en raison de la cote de D et S. On en déduit, par application de l'antique théorème, que $\frac{BU}{BS} = \frac{OD}{OS} = \frac{1}{3}$.
2. Considérons les plans (AUE) et (BCS). Ces plans sont sécants en la droite (UV). Or, (BC), incluse dans (BCS), est parallèle à (AE), incluse dans (AEU) ; puisque $ABCE$ est un carré.
   Par application du théorème du toit, on en déduit que (UV) est parallèle à (BC). Cette dernière propriété permet de construire le point V.

3. Il nous faut prouver d'une part que K appartient à (AE) et d'autre part que (KU) est perpendiculaire à (AE).
   On lit les coordonnées de $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et celles de $E\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ et on calcule ainsi $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. D'autre part on détermine $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{-1}{6}\\\frac{-1}{6}\\0\end{pmatrix}$.
   On en déduit que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$, ce qui prouve que K est un point de $[AE]$.
   Déterminons les coordonnées de U. On a démontré dans la question 1 que $\overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS}$, ce qui donne un système portant sur les coordonnées de U :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x_u - 0 & = & \frac{1}{3}(0-0) \\ y_u - 1 & = & \frac{1}{3}(0-1) \\ z_u & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_u & = & 0 \\ y_u & = & \frac{2}{3} \\ z_u & = & 1 \end{array}\right.$$
   On peut maintenant déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{KU}\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{5}{6}\\1\end{pmatrix}$.
   On obtient ainsi, sachant que le repère est orthonormé : $\overrightarrow{KU}\cdot\overrightarrow{AE} = \frac{-5}{6}\times(-1) + \frac{5}{6}\times(-1) + 1\times 0 = 0$, ce qui permet de conclure. Le point K est bien le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.

On pouvait également déterminer une équation paramétrique de (BS) afin de calculer les coordonnées de U.
Une telle méthode revient à chercher le réel t tel que $\overrightarrow{BU} = t\overrightarrow{BS}$ avec la cote de U égale à 1.

Partie B

1. Il suffit de s'assurer que les points A, E et U vérifient bien l'équation proposée.
   Pour le point A, on a bien $3\times 1-3\times 0+5\times 0-3=0$.
   De même pour le point E, il est clair que $3\times 0-3\times(-1)+5\times 0-3=0$.
   Et enfin, pour le point U, on vérifie mentalement que $3\times 0-3\times\dfrac{2}{3}+5\times 1-3=0$.
   Cette équation de plan convient donc.

2. Puisque l'on a muni l'espace d'un repère orthonormé, on déduit de l'équation cartésienne proposée les coordonnées d'un vecteur normal au plan (EAU). Notons $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$ ce vecteur.

   C'est un vecteur directeur de (d) puisque (d) est orthogonale au plan (EAU). À partir des coordonnées du point S et de celles de ce vecteur, on en déduit une équation paramétrique de (d) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3t\\ y &=& -3t\\ z &=& 3+5t\end{array}\right. \qquad t\in\mathbb{R}$$

3. Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de ce point satisfont simultanément une équation paramétrique de (d) ainsi qu'une équation cartésienne du plan (EAU). On cherche donc x, y, z et t tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3t\\ y &=& -3t\\ z &=& 3+5t\\ 0 &=& 3x-3y+5z-3\end{array}\right.$$

   À partir de l'équation cartésienne du plan, en substituant x, y et z on en déduit le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3t\\ y &=& -3t\\ z &=& 3+5t\\ 0 &=& 3(3t)-3(-3t)+5(3+5t)-3\end{array}\right.$$

   La dernière équation permet de déterminer $t=\dfrac{-12}{43}$ et, par suite, on peut déterminer les coordonnées de $H\begin{pmatrix}\frac{-36}{43}\\\frac{36}{43}\\\frac{69}{43}\end{pmatrix}$.

4. Le plan (EAU) coupe le pyramide $SABCE$ en un solide $ABUECV$ d'une part et une pyramide $SAUVE$ d'autre part. Il nous faut donc déterminer si ces deux solides ont le même volume ; ce qui revient à déterminer si le volume de l'un des deux solides correspond à la moitié de celui de $SABCE$.

Or toutes les questions précédentes nous ont permis de rassembler des éléments permettant de calculer le volume de la pyramide $SAUVE$. Nous connaissons en effet l'aire de sa base $\mathscr{A}_{AUVE} = \dfrac{5\sqrt{43}}{18}$. Reste à calculer sa hauteur SH. On a ainsi :

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{\left(\frac{-36}{43} - 0\right)^2 + \left(\frac{36}{43} - 0\right)^2 + \left(3 - \frac{69}{43}\right)^2} \\ &= \frac{12}{\sqrt{43}} \end{aligned}$$

Le volume de la pyramide $SAUVE$ est donc $\mathscr{V}_{SAUVE} = \dfrac{1}{3}\mathscr{A}_{AUVE} \times SH$, ce qui donne après calcul : $\mathscr{V}_{SAUVE} = \dfrac{10}{9}$.

Pour finir, déterminons le volume de la grande pyramide $SABCE$. On peut, par application du théorème de Pythagore au triangle ABO rectangle en O prouver que $AB = \sqrt{2}$. Sa base a donc pour aire $AB^2 = 2$. D'autre part, sa hauteur est $SO = 3$. Le volume de la grande pyramide est donc $\mathscr{V}_{SABCE} = \dfrac{1}{3}AB^2 \times SO = 2$.

On constate que $\dfrac{1}{2}\mathscr{V}_{SABCE} \neq \mathscr{V}_{SAUVE}$, ce qui permet de conclure.

Partie 1

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

— Par propriété de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{t\to+\infty} 1 + b\mathrm{e}^{-0,04t} = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = a$, d'après l'énoncé on a donc $a = 2$.

— $h(0) = 0,1 \Rightarrow \dfrac{a}{1+b} = 0,1 \Rightarrow b = \dfrac{2}{0,1} - 1 = 19$

Partie 2

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1. f est de la forme $\dfrac{2}{u}$ avec $u(t) = 1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}$ donc $f' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(t) = -0,76\,\mathrm{e}^{-0,04t}$, soit (confusion à ne pas faire entre fonction u, u' et valeurs en t ...)

$$f'(t) = \frac{2 \times 0,76\mathrm{e}^{-0,04t}}{\left(1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}\right)^2}.$$

Pour tout $t \in [0\,;\,250]$, $f'(t) > 0$ donc f strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,250]$.

2. Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à 1,5 m se traduit par $h(t) > 1,5$

$$\begin{array}{rrcl}
 & \dfrac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}} & > & 1,5 \\
\Leftrightarrow & \dfrac{2}{1,5} - 1 & > & 19\mathrm{e}^{-0,04t} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{57} & > & \mathrm{e}^{-0,04t} \\
\Leftrightarrow & \ln\left(\dfrac{1}{57}\right) & > & -0,04t \\
\Leftrightarrow & -\ln 57 & > & -0,04t \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\ln 57}{0,04} & < & t
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln 57}{0,04} \approx 101,08$.

Il faut donc un peu plus de 101 jours pour que le plant dépasse 1,5 m.

3. (a) Pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;250]$ on a

$$\frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}=\frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}(1+\frac{19}{e^{0,04t}})}=\frac{2\cancel{e^{0,04t}}}{\cancel{e^{0,04t}}(1+19e^{-0,04t})}=f(t)$$

$F(t)=50\ln\left(e^{0,04t}+19\right)$ est de la forme $50\ln u(t)$ avec $u(t)=e^{0,04t}+19$ et $u(t)>0$ sur $\mathbb{R}$.
donc $F'=50\dfrac{u'}{u}$ avec $u'(t)=0,04e^{0,04t}$, soit

$$F'(t)=50\times\frac{0,04e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}=\frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}=f(t).$$

F est donc bien une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;250]$.

(b) Par définition la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50\,;100]$ est $\mu=\dfrac{1}{100-50}\displaystyle\int_{50}^{100}f(t)\mathrm{d}t$.

$$\mu=\frac{1}{50}\,[F(t)]_{50}^{100}=\ln(e^4+19)-\ln(e^2+19)\simeq 1,03.$$

La hauteur moyenne du plant entre le 50e et le 100e jour est de 1,03 m.

4. D'après le graphique, la vitesse est maximale lorsque la pente (coefficient directeur) de la tangente à la courbe est maximale, soit à $t=80$, la hauteur du plant est environ de 1,15 m.

FONCTIONS ET INTEGRALES page 176 n°41 Polynésie Juin 2014

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=e^x \quad \text{et} \quad g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Intersection de deux courbes :

$$M(x\,;\,y)\in\mathscr{C}_f\cap\mathscr{C}_g \iff f(x)=g(x)\iff e^x=2e^{\frac{x}{2}}-1\iff\begin{cases}X=e^{\frac{x}{2}}\\ X^2-2X+1=(X-1)^2=0\end{cases}\iff e^{\frac{x}{2}}=1\iff x=0$$

Ainsi M a pour coordonnées (0; 1).

$$f'(x)=e^x\Longrightarrow f'(0)=1 \quad ; \quad g'(x)=e^{\frac{x}{2}}\Longrightarrow g'(0)=1$$

En M, leurs tangentes ont, toutes deux le même cœfficient directeur 1,
elles ont donc même tangente Δ d'équation $y-1=1(x-0)\iff y=x+1$.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2$.
   a) Limite de la fonction h en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty}e^{\frac{x}{2}}=0$$

b) Pour tout réel x

$$x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\frac{2}{x}\right)=\cancel{x}\times e^{\frac{x}{2}}\times\frac{2}{\cancel{x}}-x-\cancel{x}\frac{2}{\cancel{x}}=2e^{\frac{x}{2}}-x-2=h(x)$$

Limite de la fonction h en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}x\times\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}=+\infty,\text{ car }\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\text{ et }\lim_{X=\frac{x}{2}\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$$

c) Fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

$$h'(x)=2\times\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-1=e^{\frac{x}{2}}-1$$

$$h'(x)>0\iff e^{\frac{x}{2}}>1\iff\frac{x}{2}>0\iff x>0\text{ et }h'(x)<0\iff e^{\frac{x}{2}}<1\iff\frac{x}{2}<0\iff x<0$$

d) Tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) La fonction h possède un minimum en 0 qui est 0. Donc :

$$\forall x,\ x\in\mathbb{R},\ h(x)\geqslant 0\iff 2e^{\frac{x}{2}}-x-2=2e^{\frac{x}{2}}-1-x-1\geqslant 0\iff 2e^{\frac{x}{2}}-1\geqslant x+1$$

f) Ainsi la courbe $\mathscr{C}_g$ se trouve au dessus de la droite d'équation $y=x+1$ qui est la droite Δ.

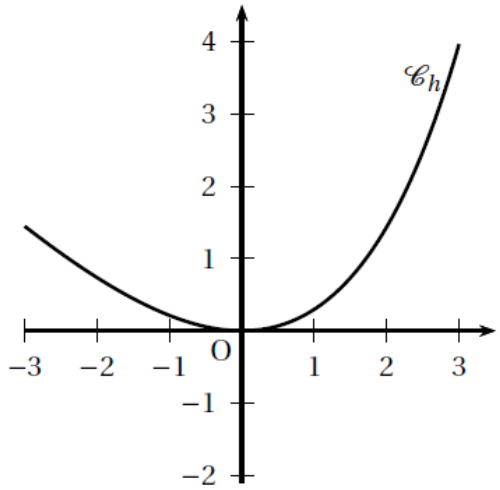
3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

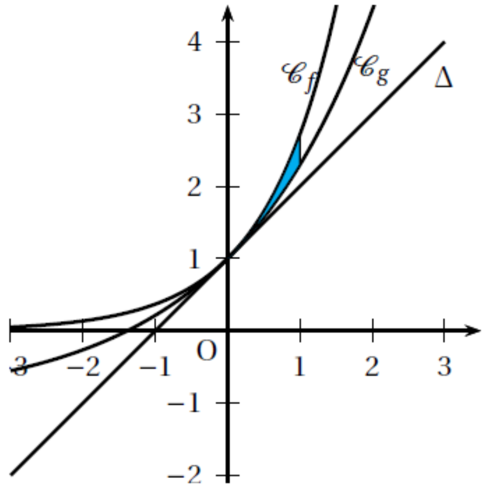
a) On a vu plus haut (question 1.) que, pour tout réel x, $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2=f(x)-g(x)\geqslant 0$.

b) Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.
Ainsi, $|f(x)-g(x)|=\left(f(x)-g(x)\right)$.

4. Aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$:

$$\mathscr{A}=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x-4\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{d}x$$
$$=[\mathrm{e}^x]_0^1-4\left[\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right]_0^1+[x]_0^1=\mathrm{e}-1-4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+4+1=\mathrm{e}-4\sqrt{\mathrm{e}}+4\simeq 0,123$$





SUITES ET INTEGRALES page 151 n°24 Inde Avril 2007

1. Le numérateur de f est la composée d'une fonction affine et de la fonction ln. Elle est donc dérivable pour $x>-3$. Le dénominateur est une fonction affine. f est donc dérivable comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur $[0\,;\,+\infty[$.

On calcule $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$. Comme $(x+3)^2\geqslant 9>0$, la dérivée est du signe de $1-\ln(x+3)$.

Or $1-\ln(x+3)=0 \iff \ln\mathrm{e}=\ln(x+3)=\iff \mathrm{e}=x+3 \iff x=\mathrm{e}-3<0$.

On a $x\geqslant 0 \iff x+3\geqslant 3>\mathrm{e}\Rightarrow x+3>\mathrm{e} \iff \ln(x+3)>\ln\mathrm{e} \iff \ln(x+3)>1 \iff 0>1-\ln(x+3)$.

Conclusion : sur $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)<0$ et la fonction est décroissante sur cet intervalle.

On a $f(0)=\dfrac{\ln 3}{3}$ et en posant $u=x+3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

D'où le tableau de variations de f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'	$-$
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$ ↘ 0

2. a. Si $n \leqslant x \leqslant n+1$ alors par décroissance de la fonction sur f sur $[0\,;\,+\infty[$, $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.

b. En intégrant de n à $n+1$ les fonctions précédentes on obtient l'encadrement :

Pour tout entier naturel n,

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x \text{ ou}$$
$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

c. En appliquant le théorème des gendarmes, u_n qui est encadré par deux nombres qui ont pour limite 0 a pour limite 0.

3. a. La fonction définie par $x \mapsto u(x) = \ln(x+3)$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, ainsi que la fonction définie par $u \mapsto u^2$. Par composition, la fonction F est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

Sur cet intervalle, $F'(x) = 2u \times u' = 2\times\ln(x+3)\times\dfrac{1}{x+3} = 2\dfrac{\ln(x+3)}{x+3} = 2f(x)$.

b. D'après la question précédente , pour tout entier naturel n :

$I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{F(x)}{2}\right]_0^n = \frac{1}{2}[F(x)]_0^n = \frac{1}{2}[F(n)-F(0)] =$

$I_n = \dfrac{[\ln(n+3)^2 - [\ln 3]^2}{2}$.

4. Pour tout entier n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ par application de la relation de Chasles. Finalement : $S_n = I_n = \dfrac{[\ln(n+3)^2 - [\ln 3]^2}{2}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+3) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(n+3) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}[\ln(n+3)]^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

La suite (S_n) est divergente.

SUITES ET INTEGRALES page 152 n°25 Centres étrangers Juin 2012

1. (a) G est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée de la fonction carrée suivie de la fonction exponentielle toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ (puis produit par $\frac{1}{2}$).

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$, ainsi $u'(x) = 2x$:

$G'(x) = \dfrac{1}{2}\times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \dfrac{1}{2}\times 2x\mathrm{e}^{x^2} = g(x)$

(b) $I_1 = \int_0^1 x^1 e^{x^2}\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = [G(x)]_0^1 = G(1) - G(0) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}.$

$$I_1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

c) $H_n(x) = x^{n+1}\, G(x)$

H est dérivable sur IR comme produit de deux fonctions dérivables sur I.

Or, $H_n = uv$ donc $H'_n = u'v + uv'$

Donc pour tout réel x, on a : $H'_n(x) = (n+1)x^n\, G(x) + x^{n+1}\, G'(x)$

$$H'_n(x) = \frac{1}{2}(n+1)x^n e^{x^2} + x^{n+1}\, 2xe^{x^2}$$

$$H'_n(x) = \frac{1}{2}(n+1)x^n e^{x^2} + 2x^{n+2}\, e^{x^2}$$

Donc en intégrant, $\int_0^1 H'_n(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)x^n e^{x^2} dx + \int_0^1 2x^{n+2} \times \frac{1}{2} e^{x^2} dx$

$$H_n(1) - H_n(0) = \frac{1}{2}(n+1) \int_0^1 x^n e^{x^2} dx + \int_0^1 x^{n+2} e^{x^2} dx$$

$$1^{n+1} \times \frac{1}{2} e^{1^2} - 0^{n+1} \times \frac{1}{2} e^{0^2} = \frac{1}{2}(n+1)\, I_n + I_{n+2}$$

On en déduit : $\frac{1}{2}e = \frac{1}{2}(n+1)\, I_n + I_{n+2}$

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}(n+1)\, I_n$$

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}\, I_n$$

(d) On fait $n = 1$ dans l'égalité précédente : $I_3 = \frac{1}{2}e - \frac{1+1}{2} I_1 = \frac{1}{2}e - I_1 = \frac{1}{2}$

On recommence avec $n = 3$: $I_5 = \frac{1}{2}e - \frac{3+1}{2} I_3 = \frac{1}{2}e - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e - 1.$

$$I_3 = \frac{1}{2} \qquad I_5 = \frac{1}{2}e - 1$$

2. On remarque que $I_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$ et que $I_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2} I_n$.

⚠ *Dans la boucle, on gère u avant n : on utilise la valeur de n entrante pour la nouvelle affectation de u.*

Étape	u	n	Commentaire
Initialisation	I_1	1	ce sont les valeurs en entrant dans la boucle
Première entrée Première sortie de la boucle	I_1 I_3	1 3	on incrémente de 2 en 2
Seconde entrée Seconde sortie	I_3 I_5	3 5	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	La dernière valeur vérifiant $n > 21$ est 19
Dernière entrée Dernière sortie	I_19 I_{21}	19 21	
Affichage	I_{21}		le terme obtenu en dernier

En sortie de cet algorithme, on obtient I_{21}.

3. (a) *Ici, il faut revenir à la définition de I_n*

   Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x^n \mathrm{e}^{x^2} \geqslant 0$ car « une fonction exponentielle » est positive. Comme I_n est donc l'intégrale d'une fonction positive, les bornes étant dans l'ordre croissant, finalement $I_n \geqslant 0$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\quad x \leqslant 1 \implies x^{n+1} \leqslant x^n$ on a multiplié par $x^n \geqslant 0$ et vérifié en 0

   $\implies x^{n+1}\mathrm{e}^{x^2} \leqslant x^n \mathrm{e}^{x^2}$ on a multiplié par $\mathrm{e}^{x^2} > 0$

   $\implies I_{n+1} \leqslant I_n$ par intégration de l'inégalité

   Par définition, la suite (I_n) est décroissante.

   (c) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

4. Montrons par l'absurde que $\ell = 0$. Supposons donc $\ell \neq 0$.

   On va « passer à la limite » dans la relation $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2} I_n$.

   D'une part : comme $\ell \neq 0$, par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2} I_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2} I_n = -\infty$

D'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+2} = \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \ell$

On devrait donc avoir $\ell = -\infty$, ce qui est absurde car $\ell \geqslant 0$ (voir la question 3.c)

Conclusion : $\ell = 0$