TES/Spé TL **Corrigé du D.S. n°1 du vendredi 23 septembre 2016** **1h15min**

Nom: ………………………………………………………………… **Calculatrice autorisée**

Le barème, à titre indicatif, est noté sur 20.

EXERCICE 1 (12 *points*) SUITES.

Une agence de presse a la charge de la publication d'un journal hebdomadaire traitant des informations d'une communauté de communes dans le but de mieux faire connaître les différents évènements qui s'y déroulent.
Un sondage prévoit un accueil favorable de ce journal dans la population.
Une étude de marché estime à 1 200 le nombre de journaux vendus lors du lancement du journal avec une progression des ventes de 2% chaque semaine pour les éditions suivantes.
L'agence souhaite dépasser les 4 000 journaux vendus par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de journaux vendus n semaines après le début de l'opération. On a donc $u_0 = 1\,200$.

1. Calculer le nombre u_1 de journaux vendus une semaine après le début de l'opération.

Chaque semaine, les ventes progressent de 2% donc $u_1 = 1\,200 \times \left(1 + \dfrac{2}{100}\right) = \mathbf{1\,224}$.

2. Écrire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

Chaque semaine, les ventes progressent de 2% donc $\boldsymbol{u_{n+1}} = u_n \times \left(1 + \dfrac{2}{100}\right) = \boldsymbol{u_n \times 1{,}02}$

Donc **la suite (u_n) est géométrique** de raison $q = 1{,}02$ et de 1er terme $u_0 = 1\,200$.
D'où $\boldsymbol{u_n} = u_0 \times q^n = \mathbf{1\,200 \times 1{,}02^n}$.

3. Déterminer à partir de combien de semaines le nombre de journaux vendus sera supérieur à 1 500.
On résoud l'inéquation : $\boldsymbol{u_n \geq 1\,500}$

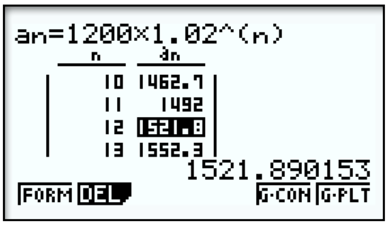
- $1{,}02 > 1$ donc **la suite $(1{,}02^n)$ est strictement croissante.**
  $1\,200 > 0$, les variations sont conservées quand on multiplie par un nombre positif donc **la suite (u_n) est strictement croissante.**
- Utilisons la calculatrice : dans le mode récurrence :
  On tape $a_n = 1\,200 \times 1{,}02^n$

  Dans SET, on entre Start = 0
  End = 50

  On obtient le tableau ci-contre :

  $\boldsymbol{u_{11} \approx 1\,492}$ $u_{68} < 1\,500$

  $\boldsymbol{u_{12} \approx 1\,522}$ $u_{69} > 1\,500$



Donc le plus petit entier tel que $u_n \geq 1\,500$ est 12.

Le nombre de journaux vendus sera supérieur à 1 500 au bout de 12 semaines.

4. Voici un algorithme :

VARIABLES :	U est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	U prend la valeur 1 200
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $U < 4\,000$
	N prend la valeur $N + 1$
	U prend la valeur $1{,}02 \times U$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

(a) Déterminer la valeur de N affichée par cet algorithme.
La valeur affichée en sortie de cet algorithme est 61.

(b) Interpréter le résultat précédent.
Au bout de 61 semaines, le nombre de journaux vendus, par semaine, sera supérieur à 4 000.

5. (a) Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + \cdots + 1{,}02^n = 50 \times (1{,}02^{n+1} - 1).$$

Pour tout réel $\boldsymbol{q \neq 1}$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Donc $1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + \cdots + 1{,}02^n = \dfrac{1 - 1{,}02^{n+1}}{1 - 1{,}02} = \dfrac{1 - 1{,}02^{n+1}}{-0{,}02} = \dfrac{1}{-0{,}02} \times (1 - 1{,}02^{n+1}) = -50 \times (1 - 1{,}02^{n+1})$

$= 50 \times (-(1 - 1{,}02^{n+1})) = \mathbf{50 \times (1{,}02^{n+1} - 1)}$

(b) On pose, pour tout entier n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

À l'aide de la question précédente, montrer que l'on a :

$$S_n = 60\,000 \times (1{,}02^{n+1} - 1).$$

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$= 1\,200 + 1\,200 \times 1{,}02 + \ldots + 1\,200 \times 1{,}02^n$

$= 1\,200 \times (1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + \cdots + 1{,}02^n)$

$= 1\,200 \times 50 \times (1{,}02^{n+1} - 1)$ d'après la question précédente

$\mathbf{= 60\,000 \times (1{,}02^{n+1} - 1)}$

(c) Déduire de la question précédente le nombre total de journaux vendus au bout de 51 semaines. Le résultat sera arrondi à l'unité.

$S_{51} = 60\,000 \times (1{,}02^{51+1} - 1)$

$= 60\,000 \times (1{,}02^{52} - 1)$

$\approx$ **108 020** **Au bout de 51 semaines, le nombre total de journaux vendus est 108 020.**

EXERCICE 2 (8 *points*) ETUDE DE FONCTION.

On mesure la satisfaction des consommateurs par une « fonction de satisfaction » f, à valeurs dans l'intervalle [0 ; 100]. La satisfaction vaut 0 lorsque les consommateurs ne sont pas satisfaits et vaut 100 lorsque les consommateurs sont pleinement satisfaits : on parle alors de « saturation ».

On définit la fonction « envie » v comme étant la dérivée de la fonction f.

On a donc $v = f\,'$.

On dit qu'il y a « envie » lorsque v est positive. Sinon on dit qu'il y a « rejet ».

Une agence de voyages propose différents types de formules pour les vacances et décide d'étudier la satisfaction de ses clients concernant la durée en jours d'une croisière.

La fonction de satisfaction f est définie sur l'intervalle [0 ; 21] par :

$$f(x) = 0{,}02\,x^3 - 1{,}4\,x^2 + 22\,x$$

où x est la durée, en jour, de la croisière.

1. Calculer $f\,'(x)$, puis en étudier le signe sur [0 ; 21].

$\boldsymbol{f\,'(x)} = 0{,}02 \times 3\,x^2 - 1{,}4 \times 2\,x + 22 = \mathbf{0{,}06\,x^2 - 2{,}8\,x + 22}$

$f\,'(x) = ax^2 + b\,x + c$ avec $a = 0{,}06$; $b = -2{,}8$; $c = 22$

$\boldsymbol{\Delta} = b^2 - 4ac = (-2{,}8)^2 - 4 \times (0{,}06) \times (22) = 7{,}84 - 5{,}28 = \mathbf{2{,}56}$

$\Delta > 0$ donc ce trinôme du second degré admet deux racines :

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2{,}8 + \sqrt{2{,}56}}{2 \times 0{,}06} = \frac{2{,}8 + 1{,}6}{0{,}12} = \frac{4{,}4}{0{,}12} = \mathbf{\frac{110}{3}} \approx \mathbf{36{,}7}$$

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2{,}8 - \sqrt{2{,}56}}{2 \times 0{,}06} = \frac{2{,}8 - 1{,}6}{0{,}12} = \frac{1{,}2}{0{,}12} = \mathbf{10}$$

$a = 0{,}06$ donc $\mathbf{a > 0}$

x	0		10		21
Signe de $f\,'(x)$		+	0	−	

2. Dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 21].

x	0		10		21
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variation de f	0	↗	100	↘	29,82

3. **a.** Quelle doit être la durée, en jour, de la croisière pour qu'il y ait saturation ?

Il y a saturation lorsque les consommateurs sont pleinement satisfaits, c'est-à-dire lorsque **$f(x) = 100$;** ce qui correspond au maximum de f sur [0 ; 21].

D'après le tableau de variation, **ce maximum est atteint pour $x = 10$.**

On en conclut que la saturation est atteinte au bout de 10 jours.

b. Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il envie ? Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il rejet ?

On dit qu'il y a « envie » lorsque v est positive, avec $v = f'$.

D'après le signe de f', **il y a donc envie lorsque x appartient à [0 ; 10[.**

De la même façon, **il y a rejet lorsque f' est négative donc sur]10 ; 21].**