T.S. Eléments de correction du D.N.S n°8 du 13 décembre 2016

Probabilités et suites

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules rouges et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule rouge et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Etape 1 : On tire au hasard une boule dans l'urne U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1

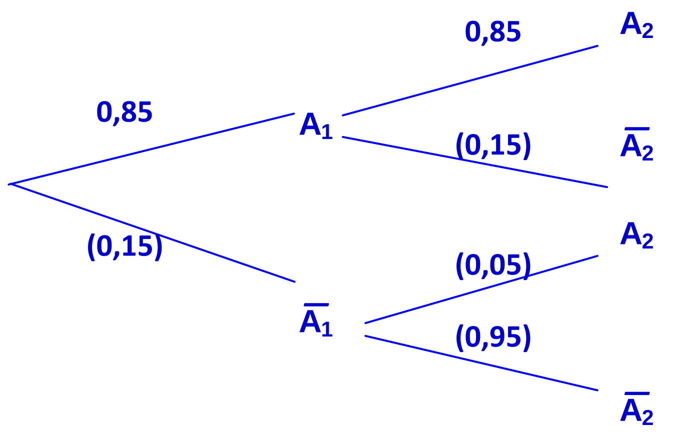
Etape 2 :

- si la boule tirée à l'étape 1 est rouge, on tire au hasard une boule dans l'urne U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1
- si la boule tirée à l'étape 1 est noire, on tire au hasard une boule dans l'urne U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2

On note A_1 l'événement « on a obtenu une boule rouge au premier tirage»
A_2 l'événement « on a obtenu une boule rouge au second tirage»

1. Préciser la valeur de $p(A_1)$ **$p(A_1) = \dfrac{17}{20} = 0,85$**

   Faire un arbre pondéré et montrer que $p(A_2) = 0,73$



Les évènements A_1 et $\overline{A_1}$ forment une partition de l'univers,

donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A1}}(A_2)$

$P(A_2) = 0,85 \times 0,85 + 0,15 \times 0,05 = 0,7225+ 0,0075 = 0,73$

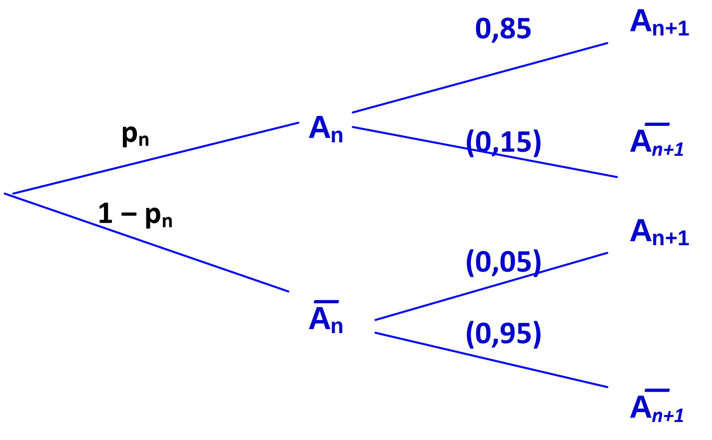
De façon générale

Etape n ($n \geq 2$) :

- si la boule tirée à l'étape $(n - 1)$ est rouge, on tire au hasard une boule dans l'urne U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1
- si la boule tirée à l'étape $(n - 1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans l'urne U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2

On note A_n l'événement « on obtient une boule rouge au $n^{ième}$ tirage » et p_n sa probabilité.

2. Compléter l'arbre pondéré ci-contre



3. a) Montrer alors que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8\, p_n + 0,05$

$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$

$p_{n+1} = p_n \times 0,85 + (1 - p_n) \times 0,05 = 0,85\, p_n + 0,05 - 0,05\, p_n = 0,8\, p_n + 0,05$

b) Calculer p_3

$p_1 = P(A_1) = 0,85$

$p_2 = P(A_2) = 0,73$

$p_3 = 0,8\, p_2 + 0,05 = 0,8 \times 0,73 + 0,05 = 0,634$

On souhaite déterminer la limite de la suite (p_n).

4. Première méthode :

a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$

Soit P_n la propriété : $p_n > 0,25$

Première étape : Initialisation

Montrons que la propriété est vraie au rang initial $n=1$, c'est-à-dire $p_1 > 0,25$

Or $p_1 = 0,85$
Comme $0,85 > 0,25$ on a donc $p_1 > 0,25$

Seconde étape : Hérédité

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang k, c'est-à-dire $p_k > 0,25$.
Montrons qu'alors la propriété est vraie au rang suivant k+1, c'est-à-dire $p_{k+1} > 0,25$

(hypothèse de récurrence) $p_k > 0,25$

$0,8 \times p_k > 0,8 \times 0,25$ (ORDRE CONSERVE car on a multiplié tous les membres de l'inégalité précédente par un réel strictement positif)

$0,8 \times p_k > 0,2$

$0,8 \times p_k + 0,05 > 0,2 + 0,05$ (ORDRE CONSERVE car on a ajouté un même réel à tous les membres de l'inégalité précédente)

$p_{k+1} > 0,25$

Conclusion : On a montré que la propriété est vraie pour n = 1 et qu'elle est héréditaire donc, par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1.

Donc pour tout entier naturel n non nul on a : $p_n > 0,25$

b) En déduire que la suite (p_n) est décroissante

Pour cela, étudions le signe de $p_{n+1} - p_n$

pour tout entier naturel n non nul on a : $p_{n+1} - p_n = 0{,}8\, p_n + 0{,}05 - p_n$

$$p_{n+1} - p_n = 0{,}05 - 0{,}2\, p_n$$

Or, on a montré précédemment que, pour tout entier naturel n non nul on a :

$p_n > 0{,}25$

$-0{,}2\, p_n < -0{,}2 \times 0{,}25$ (ORDRE INVERSE car on a multiplié tous les membres de l'inégalité précédente par un réel strictement négatif)

$-0{,}2\, p_n < -0{,}05$

$0{,}05 - 0{,}2\, p_n < -0{,}05 + 0{,}05$ (ORDRE CONSERVE car on a ajouté un même réel à tous les membres de l'inégalité précédente)

$0{,}05 - 0{,}2\, p_n < 0$

$p_{n+1} - p_n < 0$

donc la suite (p_n) est strictement décroissante

c) On admet qu'une suite décroissante minorée converge donc la suite (p_n) converge vers un réel noté ℓ. Justifier que ce réel ℓ vérifie l'équation $\ell = 0{,}8\,\ell + 0{,}05$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0{,}8\, p_n + 0{,}05$

On a admis que la suite (p_n) converge vers ℓ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \ell$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{n+1} = 0{,}8 \times \lim\limits_{n \to +\infty} p_n + 0{,}05$

$$\ell = 0{,}8\,\ell + 0{,}05$$

En déduire la valeur de ℓ. Interpréter cette limite.

$\ell = 0{,}8\,\ell + 0{,}05$

$0{,}2\,\ell = 0{,}05$

$\ell = \dfrac{0{,}05}{0{,}2}$

$\ell = 0{,}25$ **Sur un très grand nombre de tirages, la probabilité d'obtenir une boule rouge au dernier tirage sera proche de 0,25**

5. <u>Seconde méthode :</u>

Soit la suite (u_n) définie pour tout n, entier naturel non nul, par $u_n = p_n - 0{,}25$

a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,8

Pour tout entier naturel n non nul, par : $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}25$

$$u_{n+1} = (0{,}8\, p_n + 0{,}05) - 0{,}25$$

$$u_{n+1} = 0{,}8\, p_n - 0{,}2$$

$$(*)\quad u_{n+1} = 0{,}8(p_n - 0{,}25)$$

$$u_{n+1} = 0{,}8 u_n$$

autre méthode : (*) on sait que $u_n = p_n - 0{,}25$ donc $p_n = u_n + 0{,}25$

donc $u_{n+1} = 0{,}8\, p_n - 0{,}2 = 0{,}8\,(u_n + 0{,}25) - 0{,}2 = 0{,}8\, u_n + 0{,}2 - 0{,}2 = 0{,}8 u_n$

On a donc prouvé que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8

De plus son premier terme est : $u_1 = p_1 - 0{,}25 = 0{,}85 - 0{,}25 = 0{,}6$

b) Exprimer u_n puis p_n en fonction de n.

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme est : $u_1 = 0{,}6$

donc pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0{,}6 \times 0{,}8^{n-1}$

De plus, $u_n = p_n - 0{,}25$ donc $p_n = u_n + 0{,}25$

$$p_n = 0{,}6 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}25$$

c) Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

$-1 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^{n-1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}6 \times 0{,}8^{n-1}) = 0$

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}6 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}25) = 0{,}25$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}25$