TES/spé TL **Corrigé de l'évaluation n°1 de Mathématiques** **Vendredi 4 novembre 2016**

Classe : **………** **Nom**: ………………………………………………………………………………

Calculatrice autorisée - Aucun document n'est autorisé. **Durée : 3 h**

Vous apporterez un grand soin à la présentation et à la rédaction de votre copie.
***Seul** l'exercice 4 est à faire sur le sujet. Vous n'oublierez pas de rendre le sujet avec votre copie.*
Bon courage.

Le barème est noté sur 20 points.

Exercice 1. PROBABILITES (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Dans un grand collège, 20,3 % des élèves sont inscrits à l'association sportive.
Une enquête a montré que 17,8 % des élèves de ce collège sont fumeurs.
De plus, parmi les élèves non fumeurs, 22,5 % sont inscrits à l'association sportive.

On choisit au hasard un élève de ce collège. On note :

- S l'évènement « l'élève choisi est inscrit à l'association sportive » ;
- F l'évènement « l'élève choisi est fumeur ».

Rappel des notations :

Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

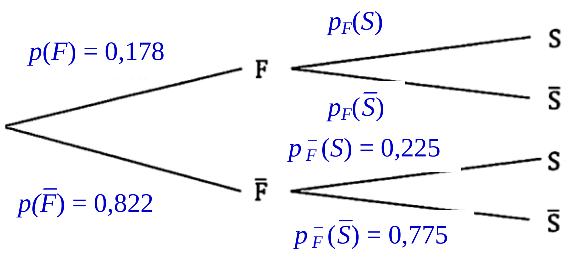
PARTIE A

1) D'après les données de l'énoncé, préciser les valeurs des probabilités $p(S)$ et .

20,3 % des élèves sont inscrits à l'association sportive donc $\boldsymbol{p(S)} = \frac{20,3}{100} = \mathbf{0,203}$.

Parmi les élèves non fumeurs, 22,5 % sont inscrits à l'association sportive, donc $\boldsymbol{p_{\overline{F}}(S)} = \frac{22,5}{100} = \mathbf{0,225}$.

2) <u>Recopier</u> l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.



Car 17,8 % des élèves de ce collège sont fumeurs donc $p(F) = \frac{17,8}{100} = 0,178$.

D'où $p(\overline{F}) = 1 - p(F) = 1 - 0,178 = 0,822$
Comme $p_{\overline{F}}(S) = 0,225$, on a $p_{\overline{F}}(\overline{S}) = 1 - p_{\overline{F}}(S) = 1 - 0,225 = 0,775$.

3) Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{F} \cap S$ et interpréter le résultat.
$p(\overline{F} \cap S) = p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(S) = 0,822 \times 0,225 = 0,18495 \approx \mathbf{0,185}$

Environ 18,5% des élèves de ce collège sont non fumeurs et inscrits à l'association sportive.

4) On choisit au hasard un élève parmi ceux inscrits à l'association sportive. Calculer la probabilité que cet élève soit non fumeur.

$$\boldsymbol{p_S(\bar{F})} = \frac{p(\bar{F} \cap S)}{p(S)} = \frac{0{,}18495}{0{,}203} \approx \mathbf{0{,}911}$$

5) On choisit au hasard un élève parmi les élèves fumeurs. Montrer que la probabilité que cet élève soit inscrit à l'association sportive est de 0,101.

F et $\bar{F}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
p(S) = p(F \cap S) + p(\bar{F} \cap S) \quad &\Leftrightarrow \quad 0{,}203 = p(F) \times p_F(S) + 0{,}18495 \\
&\Leftrightarrow \quad 0{,}203 = 0{,}178 \times p_F(S) + 0{,}18495 \\
&\Leftrightarrow \quad 0{,}203 - 0{,}18495 = 0{,}178 \times p_F(S) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{0{,}01805}{0{,}178} = p_F(S) \\
&\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p_F(S) \approx 0{,}101}
\end{aligned}$$

PARTIE B

Une loterie, à laquelle tous les élèves du collège participent, est organisée pour la journée anniversaire de la création du collège. Quatre lots sont offerts. On admet que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour que cette situation soit assimilée à un tirage avec remise.

On rappelle que 20,3% de l'ensemble des élèves sont inscrits à l'association sportive.

En justifiant la démarche, calculer la probabilité que parmi les quatre élèves gagnants, il y ait au moins un qui soit inscrit à l'association sportive.

On a une épreuve de Bernouilli puisque l'on a 2 issues :

- le succès : « l'élève est inscrit à l'association sportive » avec une probabilité $P = 0{,}203$
- l'échec : « l'élève n'est inscrit pas à l'association sportive »

On répète 4 fois cette épreuve de manière identique et indépendante. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'élèves incrits à l'association sportive (ou encore comptant le nombre de succès).

X suit une loi binomiale de paramètres $P = 0{,}203$ et $n = 4$.

$$\begin{aligned}
p(X \geq 1) &= 1 - p(X < 1) \\
&= 1 - p(X = 0) \\
&= 1 - \binom{4}{0} \times 0{,}203^0 \times (1 - 0{,}203)^4 \\
&= 1 - 0{,}797^4 \\
&\approx 0{,}597
\end{aligned}$$

Exercice 2. SUITES (5 points)

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1OOO de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.

Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2% par an.

On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000 + n)$ par une suite (U_n). On a donc $U_0 = 120\,000$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n : $U_n = 120\,000 \times 0{,}98^n$.

La production diminue de 2% par an, donc $U_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{100}\right) \times U_n = 0{,}98 \times U_n$

(U_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}98$ et de 1er terme $U_0 = 120\,000$.

$U_n = U_0 \times q^n = 120\,000 \times 0{,}98^n$

2) (a) Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005?

2005 = 2000 + 5

$U_5 = 120\,000 \times 0{,}98^5 = 108\,470{,}4956$

Le nombre de jouets fabriqués en 2005 est 108 470.

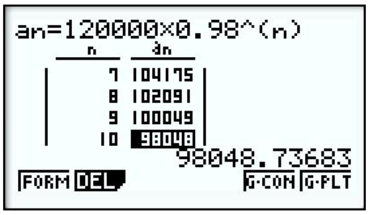
(b) Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.
On doit déterminer le plus petit n tel que $U_n < 100\,000$

- $0{,}98 < 1$ donc **la suite ($1{,}02^n$) est strictement décroissante.**
  $120\,000 > 0$, les variations sont conservées quand on multiplie par un nombre positif
  donc **la suite (U_n) est strictement décroissante.**

- Utilisons la calculatrice : dans le mode récurrence :
  On tape $a_n = 120\,000 \times 0{,}98^n$

  Dans SET, on entre Start = 0
  End = 50

  On obtient le tableau ci-contre :



  $\boldsymbol{U_9 \approx 100\,049}$ $\quad\quad$ $U_9 > 100\,000$

  $\boldsymbol{U_{10} \approx 98\,048}$ $\quad\quad$ $U_{10} < 100\,000$

  Donc le plus petit entier n tel que $U_n < 100\,000$ est 10.

$2000 + 10 = 2010$ donc le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000 à partir de 2010.

(c) Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.
Recopier et compléter les lignes 8 et 9 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 90\,000$.

1	**Variables :**	A est un réel
2		n est un entier naturel
3		
4	**Initialisation :**	Affecter à A la valeur 120 000
5		Affecter à n la valeur 0
6		
7	**Traitement :**	Tant que $A \geqslant 90000$
8		n prend la valeur $\boldsymbol{n+1}$
9		**A prend la valeur A × 0,98** **ou** **A prend la valeur 120 000 × 0,98^n**
10		Fin Tant que
11		
12	**Sortie :**	Afficher n

3) (a) Exprimer $1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \cdots + 0{,}98^n$ en fonction de n.

$$1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \cdots + 0{,}98^n = \frac{1 - 0{,}98^{n+1}}{1 - 0{,}98} \quad \text{car } q \neq 1$$
$$= \frac{1 - 0{,}98^{n+1}}{0{,}02}$$
$$= \boldsymbol{50 \times (1 - 0{,}98^{n+1})}$$

(b) On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

Montrer que $S_n = 6000000 \times (1 - 0{,}98^{n+1})$.

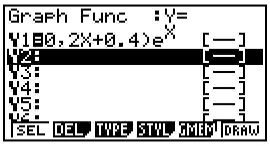
$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
$= 120\,000 + 120\,000 \times 0{,}98 + 120\,000 \times 0{,}98^2 + \ldots + 120\,000 \times 0{,}98^n$
$= 120\,000 \times (1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \cdots + 0{,}98^n)$
$= 120\,000 \times 50 \times (1 - 0{,}98^{n+1})$ $\quad\quad$ d'après la question précédente
$= 6\,000\,000 \times (1 - 0{,}98^{n+1})$

(c) En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.
Le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années est égal à
$U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{14} = S_{14}$
$= 6000000\,(1 - 0{,}98^{14+1})$
$= 1\,568\,585$
Le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production est égal à 1 568 585.

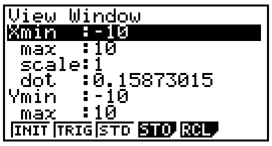
Exercice 3. FONCTIONS ET ECONOMIE (8 points)

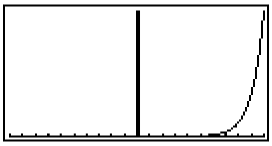
Partie A : Soit la fonction f définie sur IR par : f $(x) = (0{,}2x + 0{,}4)\ e^x$ et on note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. a) Conjecturer les variations de f. ***Vous indiquerez les réglages effectués.***

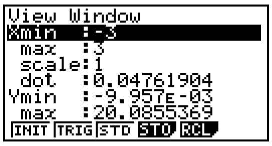


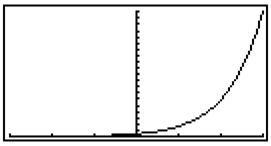
Un exemple de fenêtre :





Un autre exemple de fenêtre :





Il semble que la fonction f soit croissante sur IR

b) Nous allons chercher à valider ou non cette conjecture. Pour cela, étudier les variations de f.

f est dérivable sur IR comme produit de fonctions dérivables sur IR.

f = uv d'où f ' = u'v+ uv' avec pour tout réel x de IR :

$u(x) = 0{,}2x + 0{,}4$ $u'(x) = 0{,}2$ et $v(x) = e^x$ $v'(x) = e^x$

D'où pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$f'(x) = 0{,}2\times e^x + (0{,}2x + 0{,}4) \times e^x = 0{,}2e^x + 0{,}2xe^x + 0{,}4\ e^x = 0{,}6e^x + 0{,}2xe^x$

$\mathbf{f'(x) = (0{,}6+ 0{,}2x)e^x}$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Signe de $0{,}6+ 0{,}2x$	$-$	0	+
Signe de e^x	+	|	+
Signe de $f'(x)$	$-$	0	+
Variation de f	↘	$-0{,}2\ e^{-3}$	↗

$0{,}6+ 0{,}2x = ax + b$
avec $a = 0{,}2$; $a > 0$

De plus :
$0{,}6+ 0{,}2x = 0$
$0{,}2x = -0{,}6$
$x = \dfrac{-0{,}6}{0{,}2}$
$x = -3$

$\mathbf{f(-3) = (0{,}2\times (-3) + 0{,}4) \times e^{-3} = -0{,}2\ e^{-3}}$

2. Résoudre f $(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

$f(x) = 0$

$(0{,}2x + 0{,}4)e^x = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul

$(0{,}2x + 0{,}4)e^x = 0 \iff 0{,}2x + 0{,}4 = 0$ ou $e^x = 0$

Or $e^x = 0$ n'a pas de solution (e^x est strictement positif), on en déduit que :

$(0{,}2x + 0{,}4)e^x = 0 \iff 0{,}2x = -0{,}4$

$\iff x = -\dfrac{0{,}4}{0{,}2}$

$\iff x = -2$

$\mathbf{S = \{-2\}}$

Ceci signifie que Cf coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse – 2.

3. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point A d'abscisse zéro.

Une équation de la tangente à la courbe $\boldsymbol{C_f}$ au point A d'abscisse zéro est de la forme :

$$y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$$

Avec : $\mathbf{f'(0)} = (0,6 + 0,2 \times 0)e^0 = 0,6 \times 1 = \mathbf{0,6}$

et $\mathbf{f(0)} = (0,2 \times 0 + 0,4)e^0 = 0,4 \times 1 = \mathbf{0,4}$

D'où : $y = 0,6\,(x - 0) + 0,4$

soit $\boldsymbol{y = 0,6\,x + 0,4}$

Partie B : On s'intéresse aux fonctions demande et offre d'une entreprise de transport de marchandises. Plus précisément, pour une tonne de marchandises à transporter :

- La fonction « demande » est le prix, en euros aux 100 km, accepté par les clients en fonction de la distance x parcourue en centaines de kilomètres.
- La fonction « offre » est le prix, en euros aux 100 km, du service proposé par l'entreprise en fonction de la distance x parcourue en centaines de kilomètres.

La fonction « demande » est définie par : $d(x) = (0,2x + 0,4)\,e^x$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$

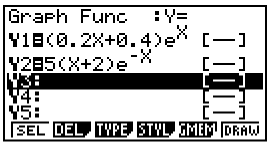
La fonction « offre » est définie par : $g(x) = \dfrac{5(x+2)}{e^x}$

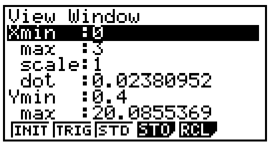
1. Pour un parcours de 120 km, quel est le prix p_1, en euros aux 100 km, qu'est prêt à payer un client et quel est le prix p_2, en euros aux 100 km, qu'est prête à lui offrir l'entreprise ? On arrondira au centime d'euro près.

$p_1 = d(1,2) = (0,2 \times 1,2 + 0,4)e^{1,2} = \mathbf{0,64 \times e^{1,2}} \approx \mathbf{2,12}$

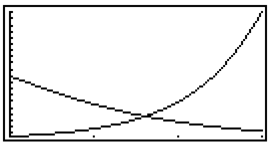
$p_2 = g(1,2) = \dfrac{5\,(1,2 + 2)}{e^{1,2}} = \dfrac{5 \times 3,2}{e^{1,2}} = \mathbf{16\,e^{-1,2}} \approx \mathbf{4,82}$

2. Sur un marché en concurrence pure et parfaite, le prix qui se forme sur ce marché et qui correspond à l'égalité entre la demande et l'offre est appelé le prix d'équilibre. On le note ici p_0.
En utilisant votre calculatrice, conjecturer une valeur de p_0.
Vous indiquerez les réglages effectués et, vous représenterez ce que vous avez visualisé à l'écran.

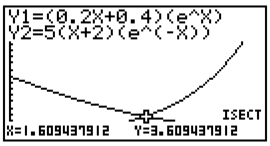




ZOOM AUTO



G-Slove ISCT



Donc $p_0 \approx 3,61$

Exercice 4. Q.C.M. (2 points) **<u>A faire sur l'énoncé</u>**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte quatre réponses possibles.
Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour chaque question, cocher la réponse exacte, on ne demande pas de justification.
Chaque réponse exacte rapportera 0,5 point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

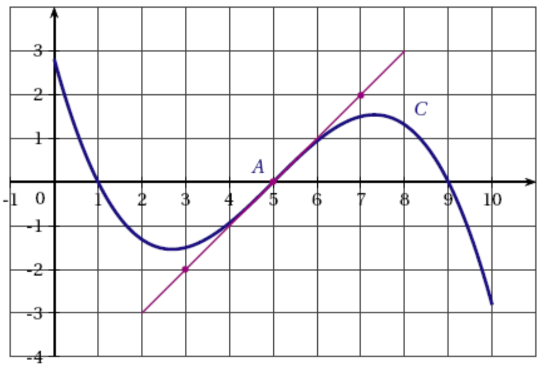
☐ $-\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$ ☒ $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}}$ ☐ $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$ ☐ e^{a}

2. Pour tout réel a, le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

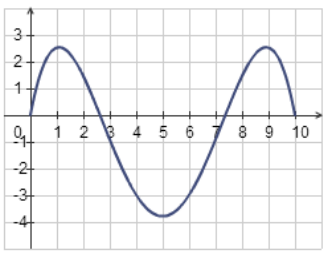
☒ $\sqrt{\mathrm{e}^{a}}$ ☐ $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{2}$ ☐ $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{2}}$ ☐ $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}$

3. On donne ci-contre la représentation graphique C d'une fonction f définie sur [0;10].

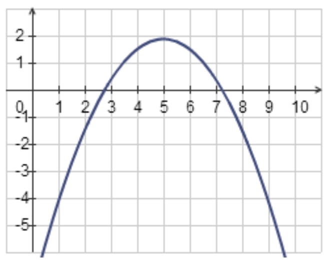
La tangente à la courbe C au point A d'abscisse 5 est tracée.



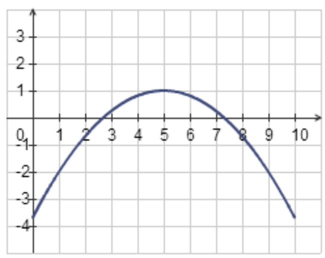
Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f' de la fonction f.



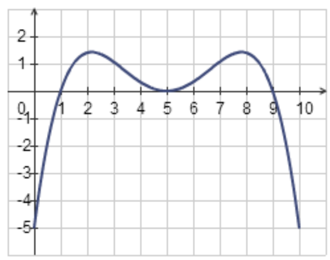
☐ Courbe $C1$



☐ Courbe $C2$

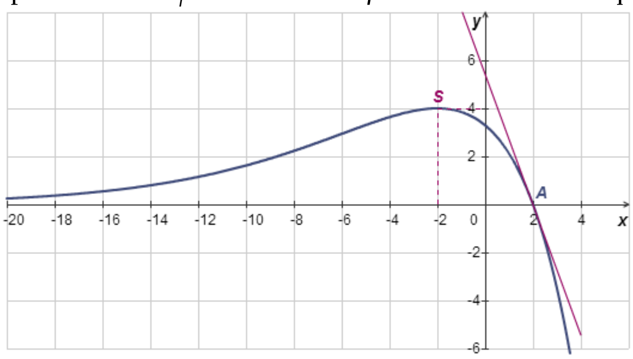


☒ Courbe $C3$



☐ Courbe $C4$

4. On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2.



Parmi les équations données ci–dessous, une seule est celle de la tangente à C_f en A. Trouver celle–ci.

☒ $y = -\mathrm{e}x+2\mathrm{e}$ ☐ $y = 3x+2\mathrm{e}$ ☐ $y = \mathrm{e}x+3\mathrm{e}$ ☐ $y = -5x+4\mathrm{e}$