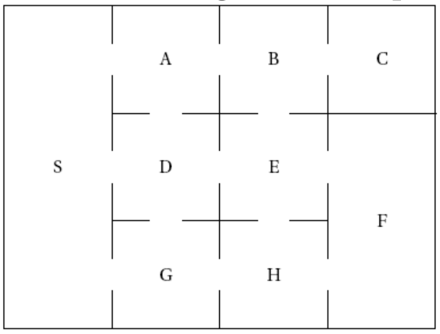
Bac Blanc n°1 : Corrigé de l'exercice 2   Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Un musée est constitué de 9 salles notées :
S, A, B, C, D, E, F, G et H.
Le plan du musée est représenté ci-contre :

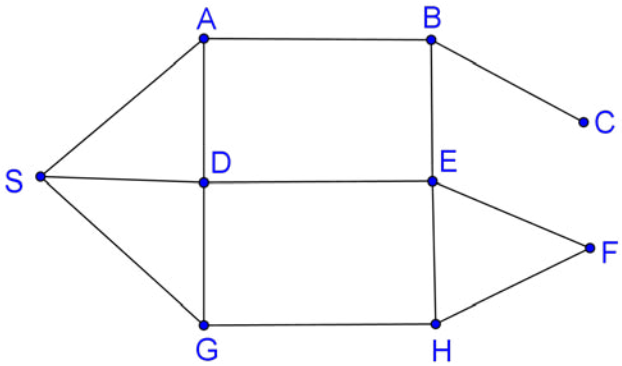
Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, D ou G. S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B, mais pas dans la salle F.



Partie A.

On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort. Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.

1. Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.



2. Un visiteur désire parcourir l'ensemble des salles en passant par chaque porte une fois et une seule.

a. Son souhait est-il réalisable ? Expliquer et justifier.

Chercher à parcourir l'ensemble des salles d'exposition en passant par chaque porte une fois et une seule revient à chercher si le graphe tracé dans la question 1) admet une chaîne eulérienne.

D'après le théorème d'Euler, un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il est connexe et admet exactement zéro ou deux sommets de degré impair.

Ici **le graphe est connexe** car deux sommets quelconques peuvent être reliés par au moins une chaîne.

On a de plus :

Sommets	S	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	3	3	3	1	4	4	2	3	3

Il existe donc **6 sommets de degré impair donc il n'existe pas de chaîne eulérienne.**

Le souhait du visiteur n'est donc pas réalisable.

b. Si oui, donner un exemple d'un tel parcours. Si non, indiquer les portes qui seront franchies deux fois.

Au moins deux portes seront franchies deux fois pour réaliser un parcours passant par chacune des salles et chacune des portes.
Par exemple, dans le parcours suivant : C-B-A-S-D-E-F-H-G-D-A-B-E-H-G-S, les portes entre les salles A et B et entre les salles G et H sont franchies deux fois.

c. Peut-on préserver un tel itinéraire en supprimant deux portes de communication convenablement choisies ? Préciser.

<u>1ère solution</u> : **en supprimant les portes S-A et G-H**. Dans ce cas, **il n'y a plus que deux sommets exactement de degré impair : B et C, et le graphe admet une chaine eulérienne : C-B-E-F-H-E-D-S-G-D-A-B**

Sommets	S	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	2	2	3	1	4	4	2	2	2

2ème solution : **en supprimant les portes S-G et A-B**. Dans ce cas, **il n'y a plus que deux sommets exactement de degré impair : C et H, et le graphe admet une chaine eulérienne : C-B-E-D-A-S-D-G-H-F-E-H**

Sommets	S	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	2	2	2	1	4	4	2	2	3

3ème solution : **en supprimant les portes G-H et A-B**. Dans ce cas, **il n'y a plus que deux sommets exactement de degré impair : S et C, et le graphe admet une chaine eulérienne : C-B-E-F-H-E-D-G-S-D-A-S**

Sommets	S	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	3	2	2	1	4	4	2	2	2

Partie B.

On note M la matrice à 9 lignes et à 9 colonnes associée au graphe précédent, en convenant l'ordre des salles S, A, B, C, D, E, F, G, H.

1. Le graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice ?

La matrice M est symétrique par rapport à sa diagonale principale.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On donne la matrice :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & \boxed{2} & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 \\ 11 & 3 & 16 & \boxed{0} & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ \boxed{2} & 6 & \boxed{0} & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 \\ 20 & 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 \\ 12 & 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

a. Combien y a t il de chemins qui, en 4 étapes, partent de S et reviennent à C ? Les citer.

Les termes a_{14} ou a_{41} de la matrice M^4 donnent le nombre de ces chemins

Il y en a donc 2 :

S-D-A-B-C et S-D-E-B-C.

b. Est-il toujours possible de joindre en 4 étapes deux salles quelconques ? Justifier.

Les termes a_{34} **ou** a_{43} de la matrice M^4 sont égaux à 0, donc **il n'y a aucune possibilité de joindre les salles B et C en 4 étapes.**

c. Déterminer le nombre de chaînes fermées de longueur 4.

Le nombre de chaines fermés de longueur 4 est donné par la somme des termes de la diagonale principale de la matrice M^4, soit : 18 + 20 + 16 + 3 + 31 + 28 + 9 + 20 + 17 = **162.**

Ce nombre correspond-t-il au nombre de possibilités de ne faire que quatre salles d'exposition en commençant et finissant par la même salle ? Pourquoi ?

Ce nombre ne correspond pas au nombre de possibilités de ne faire que quatre salles d'exposition en commençant et finissant par la même salle, car il inclue des chaines comportant des allers retours entre deux salles.

Par exemple, il y a 3 chaines fermées de longueur 4 partant de C pour revenir à C :
C-B-A-B-C (3 salles) ; C-B-E-B-C (3 salles) et C-B-C-B-C (2 salles)

Partie C.

Une entreprise a remplacé les revêtements muraux et le parquet des salles S et F. La salle S a nécessité 10 rouleaux de revêtement mural et 5 paquets de lames de parquet, pour un total de 202,50€.
La salle F a nécessité 7 rouleaux de revêtement mural et 4 paquets de lames de parquet, pour un total de 150 €. Le directeur désire connaitre le prix d'un rouleau de revêtement mural et celui d'un paquet de lames de parquet, afin d'estimer si son budget lui permettrait de rénover le reste des salles.

1. En posant x le prix en euros d'un rouleau de revêtement mural et y celui d'un paquet de lames de parquet, montrer que le problème posé revient à résoudre le système : $\begin{cases} 10\,x + 5\,y = 202{,}50 \\ 7\,x + 4\,y = 150 \end{cases}$

x étant le prix en euros d'un rouleau de revêtement mural et y celui d'un paquet de lames de parquet, **la salle S a nécessité 10 rouleaux de revêtement mural et 5 paquets de lames de parquet, pour un total de 202,50€**, donc $\mathbf{10\,x + 5\,y = 202{,}50}$.

La salle F a nécessité 7 rouleaux de revêtement mural et 4 paquets de lames de parquet, pour un total de 150 €, donc $\mathbf{7\,x + 4\,y = 150}$.

2. Résoudre ce système en utilisant des matrices.

Soient les matrices : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **et** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 202{,}50 \\ 150 \end{pmatrix}$

Le système à résoudre est donc équivalent à A × X = B

A^{-1} existe d'après la calculatrice (A est inversible)

donc : $A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$

or $A^{-1} \times A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (la matrice unité d'ordre 2)

d'où $I \times X = A^{-1} \times B$

soit $\mathbf{X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 12 \\ 16{,}5 \end{pmatrix}}$

Le système admet donc une unique solution (x ; y) = (12 ; 16,5)

3. Conclure.

Un rouleau de revêtement mural coûte 12 € et un paquet de lames de parquet coûte 16,50 €.