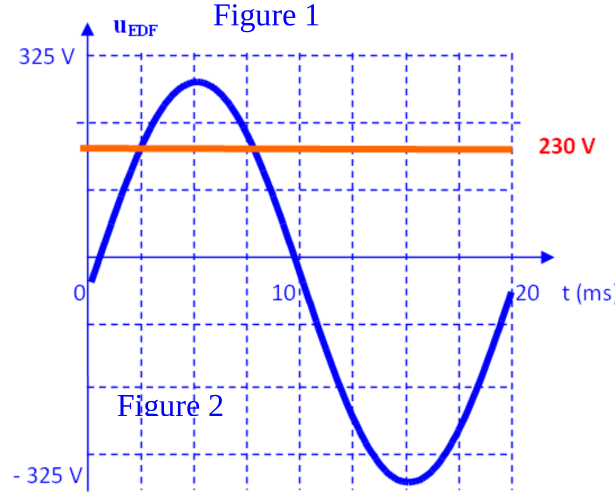
Importance du sinusoïdal

Les signaux sinusoïdaux ont une grande importance en physique.

En électrotechnique : la majeure partie de l'énergie électrique est produite et distribuée sous forme alternative sinusoïdale.
Figure 1 : allure de la tension monophasée du réseau

Figure 1



➢ **En analyse du signal** : toutes les fonctions périodiques peuvent être décomposées en une somme de fonctions sinusoïdales.
Figure 2 : Décomposition d'un signal carré

➢ **En transmission du signal** : les « porteuses » utilisées pour véhiculer l'information sont de type sinusoïdal. (TV, FM, téléphone portable).
Figure 3 : allure d'un signal en modulation de fréquence FSK (téléphone portable)

Figure 2

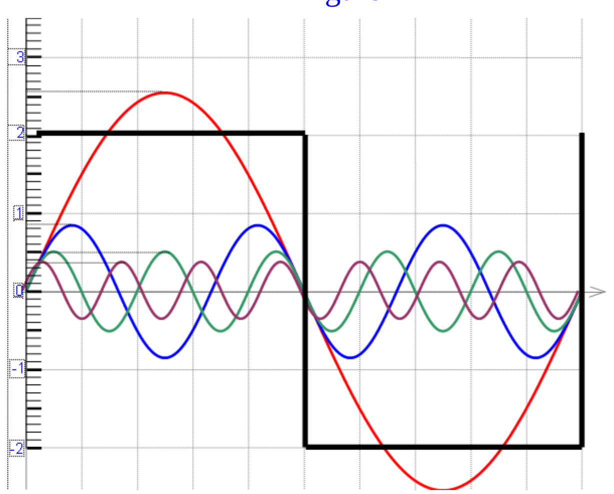
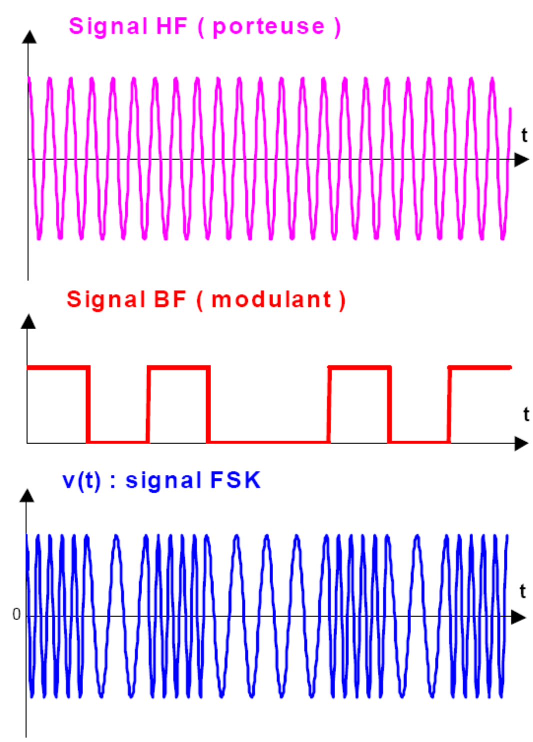


Figure 3



La fonction sinusoïde possède des propriétés mathématiques remarquables :

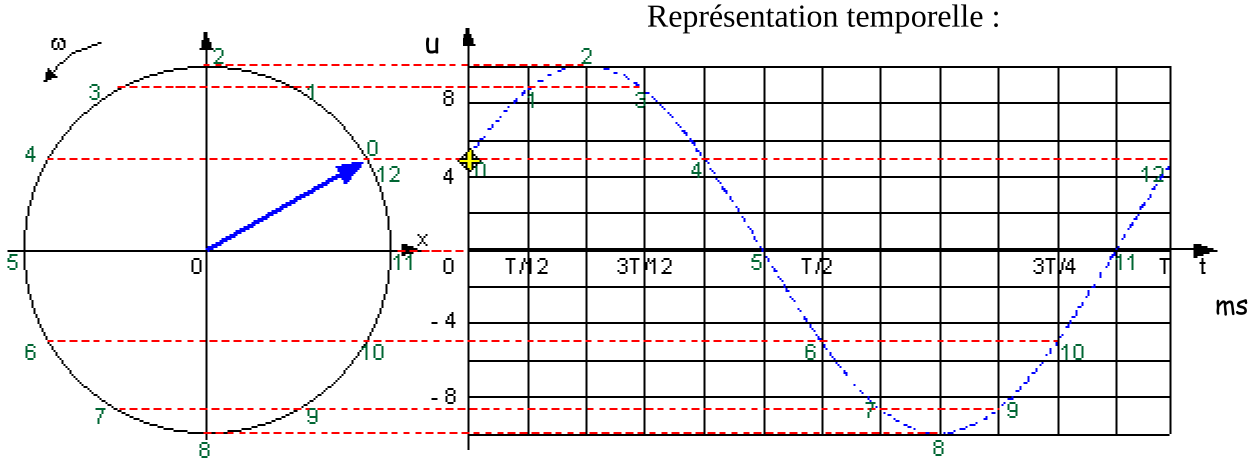
- La somme de deux fonctions sinusoïdales est une fonction sinusoïdale.
- La dérivée et la primitive d'une fonction sinusoïdale est une fonction sinusoïdale.

Signal alternatif sinusoïdal

Tout signal alternatif sinusoïdal de type **$u(t) = U\sqrt{2}.\sin(\omega t + \varphi)$**
peut être représenté par **un vecteur tournant** à la vitesse angulaire ω ($rad.s^{-1}$).

$u(t) = U\sqrt{2}.\sin(\omega t + \varphi)$: équation instantanée. **U** : tension efficace [V] **ω** : pulsation [rad/s] φ: phase à l'origine [rad]

Représentation temporelle :



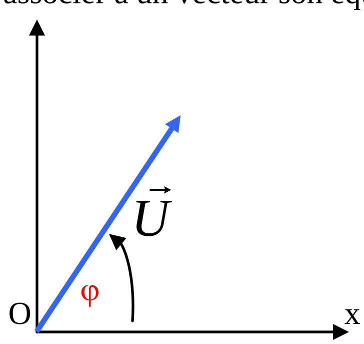
Le vecteur de Fresnel est la représentation de ce vecteur à l'instant t =0
La phase à l'origine φ est l'angle entre l'axe Ox et le vecteur.
Evaluer les grandeurs : $\varphi = 30° = \pi/6$ $U = 10/\sqrt{2}$ V

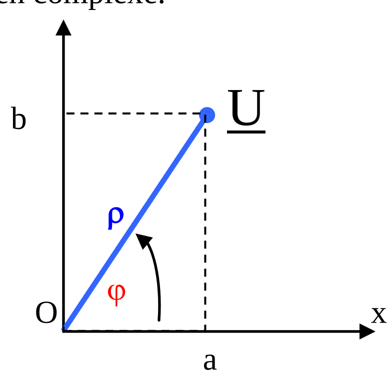
☞ ***Savoir-faire : Passer de la représentation temporelle d'un signal sinusoïdal à son équation instantanée :***

$u(t) = 10.\sin(\omega t + \pi/6)$ avec T= 12 ms ➔ $\omega = 2\pi / T \cong 523{,}6\ rad.s^{-1}$

Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

L'utilisation des vecteurs pour les calculs (somme, soustraction) nécessite souvent une résolution graphique qui n'est pas forcément rapide.
On peut associer à un vecteur son équivalent en complexe.





a : partie réelle
b: partie imaginaire
ρ : module
φ : argument

☞ ***Savoir-faire : Passer de la représentation temporelle d'un signal sinusoïdal à sa représentation complexe :***
Donner l'expression numérique de $\underline{U}$ sous les formes polaire (module, argument) et algébrique (a + jb).
$U = [\ 10/\sqrt{2}\ V\ ;\ \pi/6\ ] = 10/\sqrt{2} \times \cos(\pi/6) + j \times 10/\sqrt{2} \times \sin(\pi/6) = 6{,}12+3{,}53\ j$

☞ ***Savoir-faire : Passer l'équation instantanée d'un signal sinusoïdal à sa représentation complexe :***
Donner les expressions numérique de $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ sous les formes polaire et algébrique.

$u_1(t) = 12.\sqrt{2}.\sin(\omega t + \pi/3)$ $\underline{U}_1 = [12\ V\ ;\ 60°\ ] = 12 \times \cos 60 + j \times 12 \times \sin 60 = 6 + 10{,}39\ j$

$u_2(t) = 8.49.\sqrt{2}.\sin(\omega t - \pi/4)$ $\underline{U}_2 = [\ 6\ V\ ;\ 45°\ ] = 6 \times \cos 45 + j \times 6 \times \sin 45 = 4{,}24 - 4{,}24\ j$

➔ Déterminer l'équation instantanée de $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$
$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 6 + 4{,}24 + 10{,}39\ j - 4{,}24\ j = 10{,}24 + 6{,}15\ j$

$U = [\ \sqrt{(10{,}24^2 + 6{,}15^2)}\ ;\ \tan^{-1}(6{,}15/10{,}24)\ ] = [\ 12\ V\ ;\ 31°\ ]$

$u(t) = 12.\sqrt{2}.\sin(\omega t + \pi/6)$

Utilisation de la représentation complexe

Toutes les lois établies en régime continu sont valables en alternatif sinusoïdal à condition d'utiliser les nombres complexes.

Liste non-exhaustive :

- Loi d'ohm : $\underline{U} = \underline{Z}\ \underline{I}$

$\underline{Z}$ est l'impédance complexe d'un dipôle notée $\underline{Z} = [\ Z\ ;\ \varphi]$

φ est le déphasage introduit par le dipôle, entre la tension u à ses bornes, et le courant i qui le traverse.

Z est l'impédance simple du dipôle en Ω

- Impédance équivalente de deux dipôles $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ en série : $\underline{Z}eq = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$

- Impédance équivalente de deux dipôles $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ en // : $\underline{Z}eq = (\underline{Z}_1 . \underline{Z}_2) / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$.

- Loi des mailles : $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$

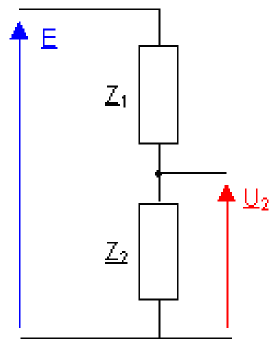
- Loi des noeuds : $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$

- Théorème de superposition

- Théorème de Thévenin …

Diviseur de tension :

$\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ sont les impédances complexes de deux dipôles linéaires.
Choisir la relation correcte (1 , 2 , 3 ou 4), pour l'expression de la tension $\underline{U}_2$



1 - $\underline{U}_2 = \underline{E}.\dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$

2 - $\underline{U}_2 = \underline{E}.\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$

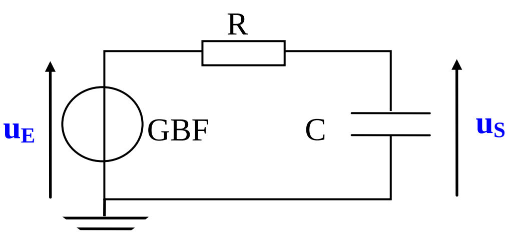
3 - $\underline{U}_2 = \underline{E}.\dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$

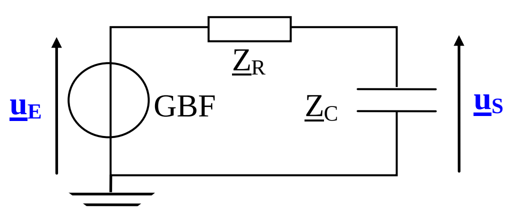
4 - $\boxed{\underline{U}_2 = \underline{E}.\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}}$

Etude d'un circuit RC :

Voici figure 1, le schéma d'un montage expérimental réalisé lors d'un TP :

En utilisant la méthode complexe, le schéma de la figure 1 devient celui de la figure 2.





Toute lettre soulignée désigne une grandeur complexe.

☞ ***Savoir-faire : Etablir l'expression de la fonction de transfert d'un circuit RC :***

La fonction de transfert est définie par : $\underline{T} = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$

Exprimer la tension fonction de transfert du circuit RC :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R} = \frac{1}{1 + R.\underline{Y}_C} = \frac{1}{1 + j.R.C.\omega} = \frac{1}{1 + j.2.\pi.R.C.f}$$

L'impédance complexe d'un condensateur est une quantité difficile à manipuler car c'est un quotient :
D'où l'intérêt, pour les futurs calculs, des termes $\underline{Y}$c plutôt que des termes $\underline{Z}$c.

☞ ***Savoir-faire : Exprimer le module et l'argument d'une fonction de transfert.***

Donner l'expression du module T et de l'argument φ

AN : Ue = 1V, R = 10 kΩ, C = 100 nF, f = 1kHz

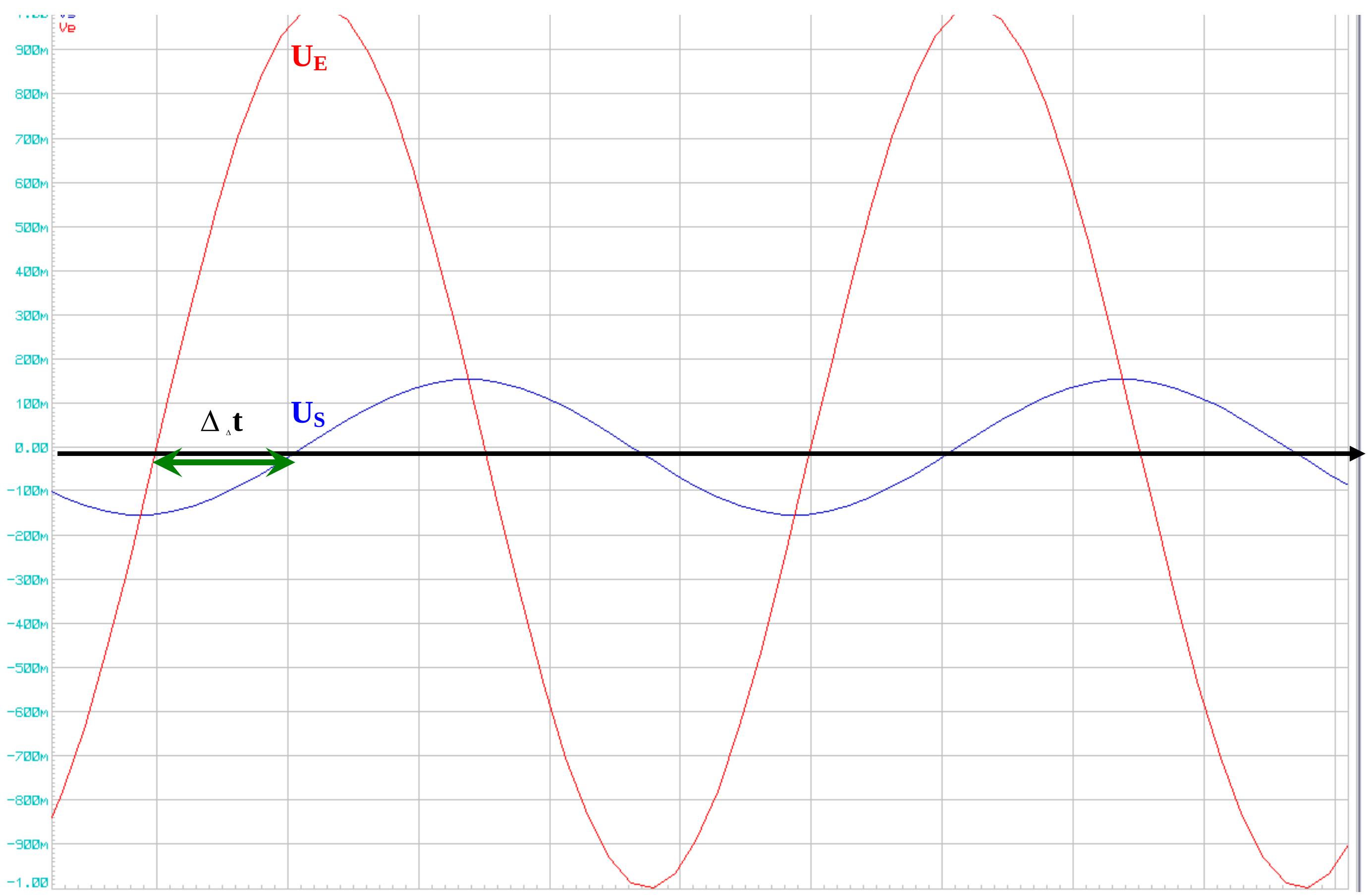
☑ $|\underline{T}| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(2\pi RCf)^2}}$ $\qquad |\underline{T}| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(2\pi .1)^2}} = 0{,}157V$

☑ $\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{T}) = 0 - \mathrm{Arg}(1 + 2.\pi.R.C.f) = \tan^{-1}(2.\pi.R.C.f)$ $\qquad \varphi = \tan^{-1}(2.\pi) = -81°$

☑ Donner l'expression de l'équation instantanée de $u_S(t)$ $\qquad \boxed{u_S(t) = 0{,}157.\sqrt{2}.\sin(6283t - 1{,}41)}$

☞ ***Savoir-faire : Passer de l'équation instantanée d'un signal sinusoïdal à sa représentation temporelle :***

Compléter l'oscillogramme suivant : 0,2ms /division



La fréquence de u_S est de 1kHz. L'amplitude de U_S est de 157 mV.
La phase à l'origine est de -81° ;
c'est-à-dire un décalage temporel par rapport à U_E : Δ t = (81* 1 ms)/360 = 0,225 ms = 225µs

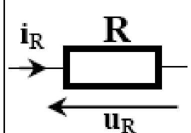
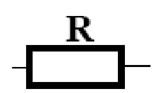
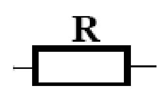
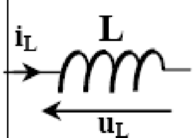
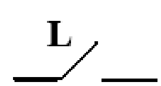
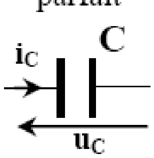
Impédances complexes. Comportement HF et BF des dipôles de base

La loi d'ohm s’écrit , en notation complexe : $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$

$\underline{Z}$ est l'impédance complexe d'un dipôle notée : $\underline{Z} = [\,Z\,;\,\varphi]$

Z est l’impédance simple du dipôle
$Z = U/I$ en Ω

φ est le déphasage introduit par le dipôle, entre la tension u à ses bornes, et le courant i qui le traverse.

Dipôle	Impédance	Impédance complexe	Comportement BF $f \longrightarrow 0$	Comportement HF $f \longrightarrow \infty$
Résistance linéaire 	$Z_R = R$	$\underline{Z}_R = R$ $\underline{Z}_R = [R;0]$	$Z_R = R$ 	$Z_R = R$ 
Bobine parfaite 	$Z_L = L\omega$	$\underline{Z}_L = jL\omega$ $\underline{Z}_L = [L\omega;+\pi/2]$	$Z_L \longrightarrow 0$ 	$Z_L \longrightarrow \infty$ 
Condensateur parfait 	$Z_C = \dfrac{1}{C\omega}$	$\underline{Z}_C = -j\dfrac{1}{C\omega}$ $\underline{Z}_C = [\frac{1}{C\omega};-\pi/2]$	$Z_C \longrightarrow \infty$ 	$Z_C \longrightarrow 0$ 

Il est important de connaître le comportement en basse fréquence (BF) et hautes fréquences (HF) de chaque élément.

Lors de l’étude d’un filtre analogique, une étude rapide BF et HF permet de connaître le comportement du filtre sans faire de calculs.