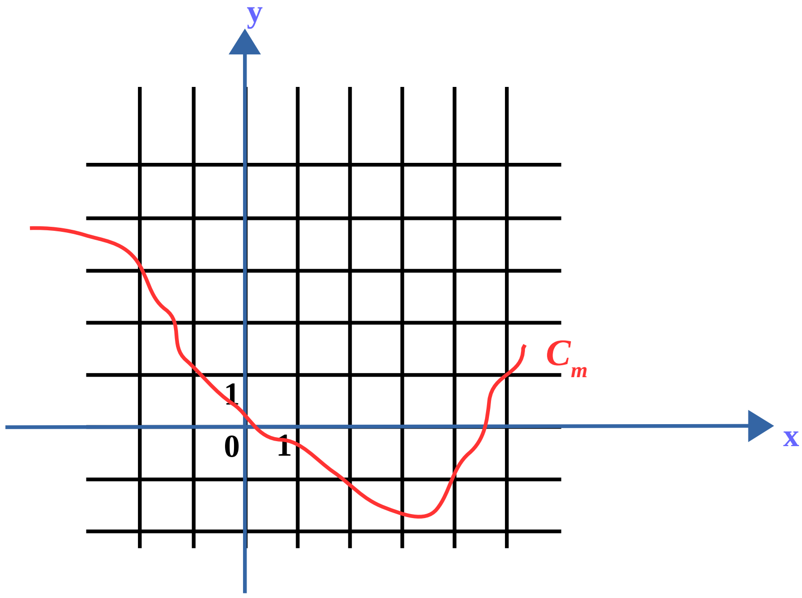
Exercices de révision (fonctions, cônes et sphères) – CORRIGE

Exercice 1 :



x	1	4	5	6	9	10	15
f(x)	8	7	6,5	7	8	9	12

$g(x) = x^2 - 1$

$h : x \longmapsto 3x + 2$

1) Trouve l'image de 5 par la fonction f.

Avant de commencer à résoudre, histoire de faire le point :
Fonction : → **notée f** *(j'utilise donc le tableau)*
Image : je la cherche ici → **elle se note f(x)**
Antécédent connue : 5 → **je sais donc que x = 5**
→ **je peux donc noter l'image cherchée : f(5)**

Seulement pour vous aider à comprendre : inutile d'écrire tout cela sur la copie !

Dans le tableau donnant les images f(x) et leurs antécédents x :
je trouve que f(5) = 6,5

x = **5**

Antécédents x →
Images de x par f →

x	1	4	5	6	9	10	15
f(x)	8	7	6,5	7	8	9	12

Notations

f(x) = **f(5) = 6,5**

2) Trouve f(10).
Antécédent : x = 10
Je cherche l'image f(10) → D'après le tableau : f(10) = 9

3) Peux-tu trouver un antécédent de 7 par la fonction f ?
Je connais l'image f(x) = 7.
Je cherche dans le tableau l'antécédent x.
Je trouve qu'il y a deux antécédents : x = 4 et x = 6.
Autrement dit : **f(4) = 7 et f(6) = 7**

4) Trouve l'image g(5).
J'utilise l'équation : $g(x) = x^2 - 1$.
Je cherche g(x) = g(5) donc je sais que x = 5, or :
$g(5) = 5^2 - 1$ *(substitution de x par sa valeur)*
Donc : l'image g(5) = 24

5) Trouve l'antécédent par la fonction g tel que g(x) = 0.

Je sais que g(x) = 0 donc je remplace l'image g(x) par 0 dans l'équation et je cherche son antécédent x :

$\mathbf{g(x) = x^2 - 1}$

$\mathbf{0 = x^2 - 1}$ *(substitution de g(x) par sa valeur)*

$\mathbf{0 = (x - 1)(x + 1)}$ *(résolution d'équation : je cherche x)*

D'après la règle du produit nul, je peux donc écrire que :

$\mathbf{x - 1 = 0}$ **ou** $\mathbf{x + 1 = 0}$

$\mathbf{x = 1}$ **ou** $\mathbf{x = -1}$

On trouve donc 2 antécédents : x = 1 et x = -1

Je peux écrire la conclusion autrement : **g(1) = 0 et g(-1) = 0**

6) Trouve l'antécédent de 8 par la fonction h

Je peux écrire pour h l'équation : h(x) = 3x + 2

Je cherche l'antécédent x et je sais que son image h(x) = 8, donc :

$\mathbf{h(x) = 3x + 2}$

$\mathbf{8 = 3x + 2}$

$\mathbf{6 = 3x}$

$\mathbf{2 = x}$

Donc : h(2) = 8 *(l'antécédent est x = 2)*

7) Quelles sont les coordonnées du point M d'abscisse 5 appartenant à la courbe représentant la fonction h ?

Je m'intéresse ici au point M(5 ; y).

Comme M appartient à la courbe de h, alors y = h(x) donc je m'intéresse au point M(5 ; h(5)).

Je n'ai pas la courbe de h, mais son équation relie l'abscisse x et l'ordonnée :

$\mathbf{y = h(x) = 3x + 2}$

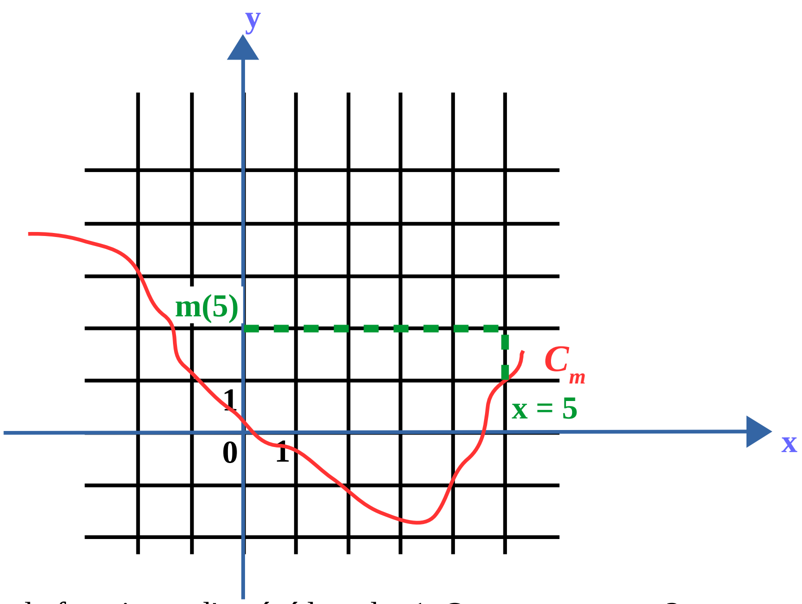
$\mathbf{h(5) = 3 \times 5 + 2}$

$\mathbf{h(5) = 17}$

Donc les coordonnées sont : M(5 ; 17)

8) Trouve m(5).

Sur la courbe de m : m(5) = ordonnée si x = 5, donc : m(5) = 1



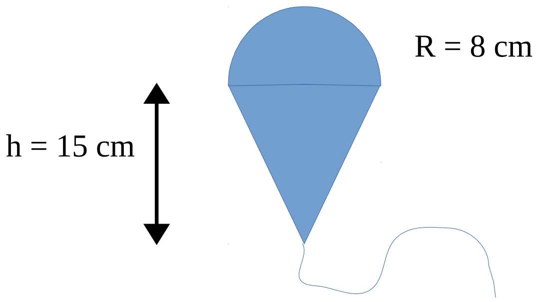
9) Trouve par la fonction m l'antécédent de -1. Que constates-tu ?

Sur la courbe de m : l'ordonnée m(x) = -1 a deux antécédents possibles : x = 2 et x = 4

Donc m(2) = m(4) = -1

Exercice 2 :

On assimile un ballon de baudruche gonflé à un cône de h = 15 cm de hauteur surmonté d'une demi-sphère de rayon R = 8 cm.



1) Calcule le volume V de ce ballon au cm³ près.

$$V_{\text{cône}} = \frac{\mathcal{A}_{\text{base}} \times h}{3} = \frac{\pi R^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 8^2 \times 15}{3} = \pi \times 64 \times 5 = 320\,\pi$$

Donc : $V_{\text{cône}} = 320\,\pi\ \text{cm}^3$

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 8^3 = \frac{2048}{3}\,\pi$$

Donc : $V_{\text{cône}} = \frac{2048}{3}\,\pi\ \text{cm}^3$

Finalement : $V_{\text{ballon}} = V_{\text{cône}} + V_{\text{demi-sphère}} = 320\,\pi + \frac{2048}{3}\,\pi = \frac{3008}{3}\,\pi \approx 3149{,}97$

Donc $V = V_{\text{ballon}} \approx 3150\ \text{cm}^3$ *(au centimètre cube près)*

2) Convertis V en litres.

$V \approx 3150\ \text{cm}^3 = 3{,}150\ \text{dm}^3 = 3{,}150\ \text{L}$ *(car 1 L = 1 dm³)*

3) Je gonfle le ballon un peu plus. La nouvelle hauteur est h' = 20 cm. Donne le facteur k d'agrandissement du ballon.

$k_{\text{agrandissement}} = \frac{\text{grand côté}}{\text{petit côté}}$ **donc ici :**

$$k = \frac{h'}{h} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

Le facteur d'agrandissement $k = \frac{4}{3}$

4) Déduis-en le nouveau rayon R'.

Tout le ballon est agrandi d'un facteur k, donc :

$$k = \frac{R'}{R}$$

$$k \times R = R'$$

$$R' = \frac{4}{3} \times 8 = \frac{32}{3}$$

Donc $R' = \frac{32}{3} \approx 10{,}7\ \text{cm}$

5) Déduis-en le nouveau volume V'.

On peut refaire tout le calcul du volume avec les nouvelles valeurs... mais il y a mieux !

$V' = k^3 \times V = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times \frac{3008}{3}\pi = \frac{4^3 \times 3008 \times \pi}{3^4} \approx 7466{,}6$

$V' \approx 7467\ cm^3$

6) Donne en pourcentage l'agrandissement de la figure.

Si je prends par exemple la hauteur de cône, elle passe de 15 à 20cm.
Pour une valeur initiale de 15 cm, elle a donc augmenté de 5 cm.
Si je traduis cela en terme de pourcentages :

	Mesure (cm)	**%**
Valeur initiale	**15**	**100**
Augmentation	**5**	**A**

$A = \frac{5 \times 100}{15} = \frac{100}{3} \approx 33{,}3$

L'augmentation des dimensions est d'environ 33 %.