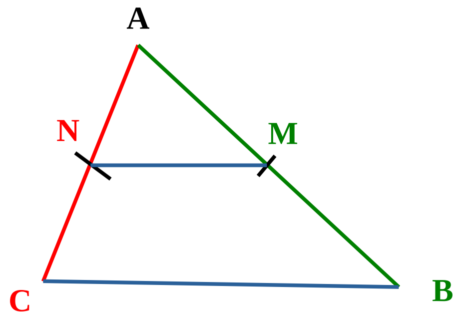
THÉORÈME DE THALÈS et sa RÉCIPROQUE

https://www.geogebra.org/m/c6mre3hp

I - Théorème de Thalès *(cas de deux triangles superposés)* :



Correspondances des côtés :

Triangle ABC	**[AB]**	**[AC]**	**[BC]**
Triangle AMN	**[AM]**	**[AN]**	**[MN]**

*Le triangle AMN est une **réduction** du triangle ABC.*

Théorème de Thalès :
Soit un triangle ABC.
Soit M un point du côté [AB] et N un point du côté [AC].
Si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC),
alors : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

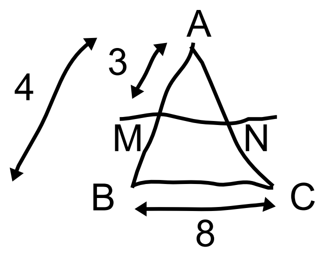
Remarques :

- Lorsque le théorème de Thalès s'applique, les longueurs des côtés du triangle AMN et les longueurs des côtés correspondants du triangle ABC sont **proportionnelles**.
  - **[AB]** dans ABC est **proportionnel et correspond à [AM]** dans AMN
  - **[AC]** dans ABC est **proportionnel et correspond à [AN]** dans AMN
  - **[BC]** dans ABC est **proportionnel et correspond à [MN]** dans AMN
- **En simplifiant** (pour mémoire) : $\frac{\textit{Longueur dans ABC}}{\textit{Longueur réduite dans AMN}} \left(= \frac{\textbf{Grand}}{\textbf{petit}} \right)$
- On peut évidemment écrire la **relation des 3 quotients dans le sens inverse** :
  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{\textit{Longueur réduite dans AMN}}{\textit{Longueur dans ABC}} \left(= \frac{\textbf{petit}}{\textbf{Grand}} \right)$

II - *Application du théorème de Thalès* :

> *« Dans le triangle ABC ci-dessus, je sais que :*
> *M Є [AB]*
> *N Є [AC]*
> *(MN) // (CB)*
> *et je connais les mesures des longueurs suivantes :*
> *AB = 4 cm*
> *AM = 3 cm*
> *BC = 8 cm*
>
> *Calcule **MN**. »*

Fais un rapide croquis :



J'écris l'information utile :

Je sais que :
M Є [AB]
N Є [AC]
(MN) // (CB)

Je cite le théorème utilisé :

Donc d'après le théorème de Thalès :

*J'écris l'**égalité des 3 quotients** :*

$$\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{BC}}$$

*Je remplace les **longueurs connues** par leur **valeur** :*

$$\frac{3}{4} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{8}$$

*Je ne conserve qu'**une seul égalité** :*

$$\frac{3}{4} = \frac{MN}{8}$$

*J'écris l'égalité des **produits en croix** :*

$3 \times 8 = MN \times 4$

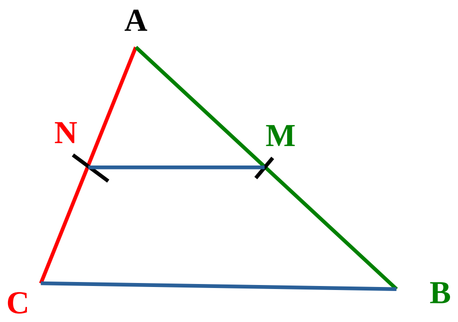
***j'isole** la valeur cherchée :*

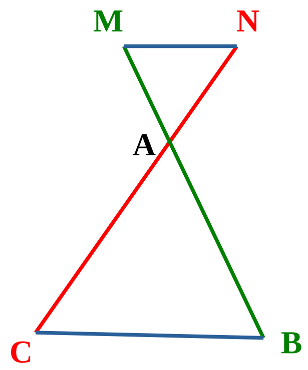
$$MN = \frac{3 \times 8}{4}$$

***Je conclus** :*

$\boxed{\mathbf{MN = 6\ cm}}$

III - Théorème de Thalès *(cas général – inclus le quadrilatère croisé)* :





Correspondances des côtés :

Triangle ABC	[AB]	[AC]	[BC]
Triangle AMN	[AM]	[AN]	[MN]

*Le triangle AMN est une **réduction** du triangle ABC.*

Théorème de Thalès :

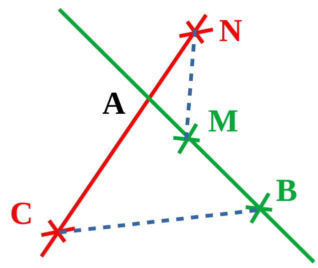
Soient deux droites **(BM) et (CN) sécantes en A**, avec **B, A, M et C, A, N respectivement alignés dans cet ordre.**

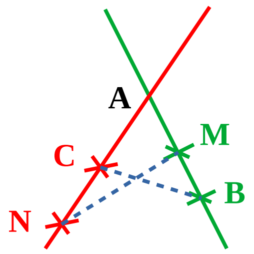
Si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC),

alors : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

Remarques :

- C'est exactement la même situation que tout à l'heure : la seule différence, c'est que **(AMN) a fait une rotation de 180° par rapport au point A** !
- On dit que **(ABMN) est un quadrilatère croisé**.
- Cet **énoncé** a l'avantage d'être **plus général** : il fonctionne dans les deux configurations de Thalès évoquées (triangles superposés et quadrilatères croisés).
- (BM) et (CN) sont sécantes en A, donc **B, A, M et C, A, N sont forcément alignés**. Mais **il faut bien préciser dans quel ordre !** Regardez les cas ci-dessous pour vous en convaincre, et voyez alors si le théorème est toujours applicable...



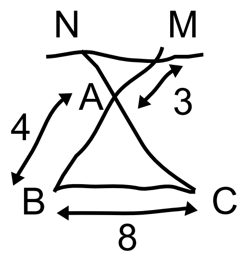


IV - Application du théorème de Thalès généralisé :

« (BM) et (CN) sont sécantes en A.
B, A, M sont alignés dans cet ordre.
C, A, N sont alignés dans cet ordre.
(MN) // (CB)
Je connais les mesures des longueurs suivantes :
AB = 4 cm
AM = 3 cm
BC = 8 cm

*Calcule **MN**. »*

Fais un rapide croquis :



J'écris l'information utile :

Je sais que :
B, A, M alignés dans cet ordre
C, A, N alignés dans cet ordre
(MN) // (CB)

Je cite le théorème utilisé :

Donc d'après le théorème de Thalès :

*J'écris l'**égalité des 3 quotients** :*

$$\mathbf{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}$$

*Je remplace les **longueurs connues** par leur **valeur** :*

$$\frac{3}{4} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{8}$$

*Je ne conserve qu'**une seul égalité** :*

$$\frac{3}{4} = \frac{MN}{8}$$

*J'écris l'égalité des **produits en croix** :*

3 × 8 = MN × 4

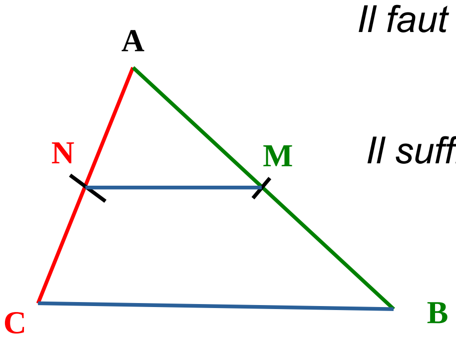
***j'isole** la valeur cherchée :*

$$MN = \frac{3\times8}{4}$$

***Je conclus** :*

$$\boxed{\mathbf{MN = 6\ cm}}$$

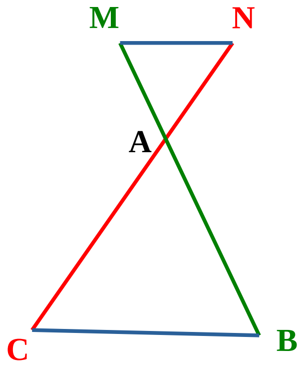
V - Réciproque du théorème de Thalès :



Il faut calculer deux rapports parmi :

$\dfrac{AB}{AM}$, $\dfrac{AC}{AN}$ *et* $\dfrac{BC}{MN}$.

Il suffit alors que ces deux rapports soient égaux pour ***prouver que*** ***(BC) // (MN)***.



Réciproque du théorème de Thalès :

Soient deux droites **(BM) et (CN) sécantes en A**, avec **B, A, M et C, A, N respectivement alignés dans cet ordre.**

Si deux des trois rapports $\dfrac{AB}{AM}$, $\dfrac{AC}{AN}$ et $\dfrac{BC}{MN}$ sont égaux, alors **(MN) // (BC)**.

Remarques :

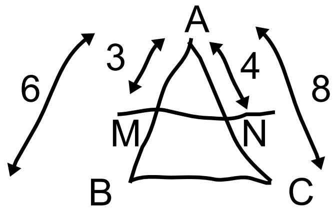
- Le **théorème de Thalès** permet de **calculer une longueur** en sachant qu'on a deux triangles semblables avec **deux côtés parallèles distincts**.
- La **réciproque du théorème de Thalès** permet à l'inverse de **prouver que deux droites sont parallèles** en connaissant **deux rapports de longueur**.

VI - Application de la réciproque du théorème de Thalès :

« (BM) et (CN) sont sécantes en A.
B, M, A sont alignés dans cet ordre.
C, N, A sont alignés dans cet ordre.
Je connais les mesures des longueurs suivantes :
AB = 4 cm AC = 8 cm
AM = 3 cm AN = 6 cm

Que peux-tu dire de (MN) et (BC) ? »

Fais un rapide croquis :



J'écris l'information utile :

Je sais que :
B, M, A alignés dans cet ordre
C, N, A alignés dans cet ordre
AB = 4 cm AC = 8 cm
AM = 3 cm AN = 6 cm

Je calcule ***deux quotients*** *:*

or :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{6}{3} = \mathbf{2}$$

$$\frac{AC}{AN} = \frac{8}{4} = \mathbf{2}$$

Je les ***compare*** *:*

d'où :

$$\mathbf{\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}}$$

Je cite la loi utilisée :

Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès :

Je conclus *:*

(BC) // (MN)