CORRIGE DU TEST 1 **TESa-TL**

Exercice 1 :

La compagnie Minéral SA exploite un gisement de fer depuis 1990.

La première année, la compagnie a extrait 100 000 tonnes de fer. Vu les difficultés d'extraction, l'exploitation du gisement diminue de 1% chaque année.

On appelle u_n le nombre de tonnes de fer extraites l'année (1990 + n).

1) Montrer que u_1 = 99 000, puis calculer u_2.

$u_1 = 0{,}99\, u_0$; u_1 = 100 000 x 0,99 ; $\mathbf{u_1 = 99\,000}$

$u_2 = 0{,}99\, u_1$; u_2 = 100 000 x $0{,}99^2$; $\mathbf{u_2 = 98\,010}$

2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

Comme l'exploitation du gisement diminue de 1% par an, on applique le coefficient multiplicateur 0,99.

Il s'agit donc d'une **suite géométrique de raison 0,99 et de premier terme 100 000.**

3) Donner l'expression explicite de u_n en fonction de n.

$\mathbf{u_n = 100\,000 \times 0{,}99^n}$

4) Montrer que la quantité totale de fer extraite entre 1990 et l'année (1990 + n) est donnée par :

$$S_n = (1 - 0{,}99^{n+1}) \times 10^7$$

De 1990 à 1990 + n, il y a (n +1) années. Il faut calculer la quantité totale de fer extraite pendant ces (n +1) années. Donc, il faut calculer la somme S_n des (n +1) premiers termes de la suite géométrique (u_n).

D'après le cours, on sait que

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$S_n = \frac{u_0 \times (1 - q^{n+1})}{1-q}$$

$$S_n = \frac{100000 \times (1 - 0{,}99^{n+1})}{1 - 0{,}99}$$

$$S_n = \frac{100000 \times (1 - 0{,}99^{n+1})}{0{,}01}$$

$$S_n = 100000 \times (1 - 0{,}99^{n+1}) \times 100$$

Donc :

$$S_n = (1 - 0{,}99^{n+1}) \times 10000000$$

Par conséquent :

$$S_n = (1 - 0{,}99^{n+1}) \times 10^7 \ .$$

5) Calculer en millions de tonnes la quantité de fer que cette compagnie pourra extraire si l'exploitation continue indéfiniment dans ces mêmes conditions.

Pour calculer ***la quantité totale*** de fer que cette compagnie pourra extraire si l'exploitation continue indéfiniment dans ces mêmes conditions, il faut chercher la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Or, $0 < 0{,}99 < 1$ donc la suite géométrique ($0{,}99^n$) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}99^n = 0$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}99 \times 0{,}99^n = 0$

Ce qui donne : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}99^{n+1} = 0$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - 0{,}99^{n+1}) = 1$

En multipliant par 10^7, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - 0{,}99^{n+1}) \times 10^7 = 10^7$

<u>**Conclusion**</u> : Si l'exploitation continue indéfiniment dans les mêmes conditions, la compagnie pourra extraire 10^7 = 10 millions de tonnes de fer de ce gisement.

Exercice 2 :

En 2008, une entreprise internationale s'est dotée d'un centre de visio-conférence qui permet de réaliser de grandes économies dans le budget « déplacement des cadres ».

Lors d'un conseil d'administration de fin d'année, le responsable du centre fait le compte rendu suivant : on a observé un fort accroissement de l'utilisation de cette technologie, le nombre de visio-conférences, qui était de 30 en 2008, a augmenté de 20% tous les ans.

1) On s'intéresse au nombre d'utilisations de la visio-conférence lors de l'année 2008 + n. On modélise la situation par une suite géométrique (v_n) où le terme v_n est une estimation de ce nombre d'utilisations lors de l'année 2008 + n.

a) Montrer que $v_n = 30 \times 1{,}20^n$

Augmenter de 20%, c'est multiplier par 1,2 donc la raison de la suite géométrique (v_n) est $q = 1{,}2$. le nombre de visio-conférences, était de 30 en 2008, donc $v_0 = 30$. Ainsi $\boldsymbol{v_n = 30 \times 1{,}20^n}$

b) Calculer le nombre d'utilisations de la visio-conférence en 2014. *On prendra la valeur approchée entière par défaut.*

2014 , c'est 2008 + 6 , soit $n = 6$. d'où : $v_6 = 30 \text{ x } 1{,}2^6$; $v_6 \approx 89$.

Ainsi le nombre d'utilisations de la visio-conférence **en 2014 est de 89.**

2) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel
	V et A sont des nombres réels
Entrée :	Saisir A
Traitement :	Affecter à V la valeur 30
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $V < A$ faire
	V prend la valeur $V \times 1{,}2$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a) On donne la valeur 100 à A. **Recopier** et compléter autant que nécessaire le tableau suivant.
Les valeurs de V seront données approchées par défaut à l'entier près.

Test $V < A$		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	FAUX
Valeur de V	30	36	43	51	62	74	89	107	
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	

b) Quelle est la valeur affichée en sortie de cet algorithme ?

La valeur affichée en sortie de cet algorithme est la dernière valeur de n, **soit 7.**

c) Interpréter cette valeur affichée dans le contexte de ce problème.

En 2015, le nombre total d'utilisations aura dépassé 100.

3) Le coût de l'installation des appareils de visio-conférence sera amorti quand le nombre total d'utilisations aura dépassé 400.
A partir de quelle année cette installation sera-t-elle amortie ?

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $S = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Le nombre total nombre total d'utilisations l'année $2008 + n$ est donc :

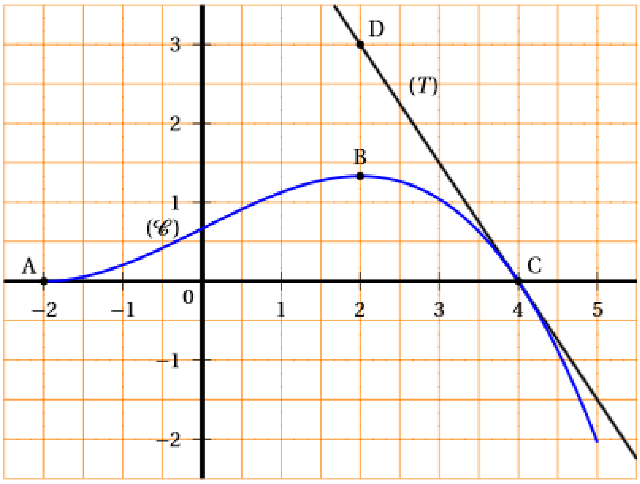
$$S = 30 \times \frac{1-1{,}2^{n+1}}{1-1{,}2} = -150 \times \left(1 - 1{,}2^{n+1}\right)$$

Pour $n = 6$, $S \approx 387$; Pour $n = 7$, $S \approx 494$

A la calculatrice, on trouve que S > 400 pour $n = 7$, soit en 2015.

Exercice 3 :

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,5]$, croissante sur $[-2\,;\,2]$ et décroissante sur $[2\,;\,5]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe ($\mathscr{C}$) tracée ci-dessous représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé ; elle passe par les points $A(-2\,;\,0)$; $B\left(2\,;\,\frac{4}{3}\right)$ et $C(4\,;\,0)$.
Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point $D(2\,;\,3)$.



1) Donner $f(2)$; $f'(2)$; $f'(4)$.
   $f(2) = 4/3$; $f'(2) = 0$; $f'(4) = -1{,}5$

2) Déterminer l'équation de la droite (T).
(T) a pour équation $y = -1{,}5x + b$.
Or C(4 ;0) est un point de (T) donc ses coordonnées vérifient l'équation . Ainsi $0 = -1{,}5 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 6$
D'où **l'équation de la droite (T) est $y = -1{,}5x + 6$.**

3) Sur l'intervalle [-2 ; 5] :
   a) donner le signe de f.
Sur [-2 ; 4[, $f(x) > 0$; pour $x = 4$, $f(x) = 0$ et sur]4 ; 5] , $f(x) < 0$
   b) dresser le tableau de signe de f'.

x	**-2**		**2**		**5**
Signe de $f'(x)$	**0**	**+**	**0**	**-**	

4) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0{,}5$ sur [-2 ; 5]. *On donnera un encadrement à 0,5 près des solutions éventuelles.*
La droite d'équation $y = 0{,}5$ coupe le courbe ($\mathscr{C}$) en 2 points sur [2 ; 5] , l'équation $f(x) = 0{,}5$ sur [-2 ; 5] a donc **2 solutions. $-0{,}5 < x_1 < 0$ et $3{,}5 < x_2 < 4$.**

Exercice 4 : **(…… / 6 pts)**
Une entreprise informatique produit et vend des clés USB. La vente de ces clés est réalisée par des commerciaux qui se déplacent aux frais de l'entreprise.

1) La direction de l'entreprise décide de diminuer le budget consacré aux frais de déplacements de ses commerciaux.
« Diminuer ce budget de 6% par an pendant 5 ans revient à diminuer ce budget de 30% sur la période de 5 ans ». Que pensez-vous de cette affirmation ? On justifiera la réponse.

Diminuer de 6% par an revient à multiplier par 0,94 .
Sur 5 ans, on multipliera par $0{,}94^5 \approx 0{,}734$, soit **une baisse d'environ 26,6 %** (1-0,734 = 0,266) . **Affirmation fausse.**

2) La production mensuelle varie entre 0 et 10 000 clés.
Le bénéfice mensuel, exprimé en **milliers d'euros**, peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

$B(x) = -x^2 + 10x - 9$ où x représente le nombre de **milliers de clés** produites.

a) Combien l'entreprise doit-elle produire et vendre de clés USB pour avoir un bénéfice positif ?

Le bénéfice sera positif si et seulement si $B(x) > 0$. Il faut donc étudier le signe du polynôme $-x^2 + 10x - 9$

$\Delta = 64$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 9$. Or $a < 0$ ($a = -1$), ainsi : $B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1 ;9[$.

Ainsi **le bénéfice sera positif si l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 9 000 clés USB .**

b) Etudier les variations de B, puis dresser son tableau de variations sur l'intervalle [0 ; 10].
En déduire pour quelles production et vente, le bénéfice sera-t-il maximum ?

$B'(x) = -2x + 10$; $B'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0 ;5[$ (il suffit de résoudre $-2x + 10 > 0$ sur [0 ; 10]) ; $B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$;
$B'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]5 ;10]$

x	0		5		10
$B'(x)$		+	0	-	
$B(x)$	-9	↗	16	↘	-9

Ainsi le bénéfice sera maximum si l'entreprise produit et vend 5000 clés USB.