CORRIGE TEST 3 **TES-TL**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province. Une enquête est faite auprès de 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport (train, avion ou autocar)

On donnera les résultats des probabilités sous forme décimale arrondie au millième.

Partie A

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1 200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise. On note F l'événement « l'employé est une femme » et T l'événement « l'employé choisit le train »

1) a) Calculer les probabilités p(F) et p(T).

$p(F)=\frac{720}{1200}=0{,}6$; $p(T)=\frac{618}{1200}=0{,}515$ Ainsi, $p(F)=0{,}6,\ p(T)=0{,}515$

b) Déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train.

$p(\overline{T})=1-p(T)=1-0{,}515=0{,}485$ $p(\overline{T})=0{,}485$

2) Expliquer ce que représente l'événement F ∩ T puis calculer sa probabilité.

$F\cap T$ est l'évènement : « l'employé est une femme qui choisit le train ». $p(F\cap T)=\frac{468}{1200}=0{,}39$

La probabilité qu'un employé soit une femme qui choisit le train est $p(F\cap T)=0{,}39$

3) L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train. Calculer la probabilité que ce soit une femme.

La probabilité de l'évènement F sachant que l'évènement $\overline{T}$ est réalisé est :

$$p_{\overline{T}}(F)=\frac{p(F\cap\overline{T})}{p(\overline{T})}$$

Or d'après la formule des probabilités totales $p(F)=p(F\cap T)+p(F\cap\overline{T})$ d'où $p(F\cap\overline{T})=p(F)-p(F\cap T)$. Soit

$$p(F\cap\overline{T})=0{,}6-0{,}39=0{,}21$$

Par conséquent,

$$p_{\overline{T}}(F)=\frac{0{,}21}{0{,}485}\approx 0{,}433$$

La probabilité qu'un employé soit une femme sachant que cet employé n'a pas choisi le train est $p_{\overline{T}}(F)\approx 0{,}433$

Partie B

Après l'étude des résultats de l'enquête, le comité d'entreprise choisit le train comme moyen de transport. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

* la formule 1 : voyage en 1$^{\text{ère}}$ classe plus l'hôtel pour un coût de 150€
* la formule 2 : voyage en 2$^{\text{ème}}$ classe plus hôtel pour un coût de 100€

40% des inscrits choisissent la formule 1

Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30€.

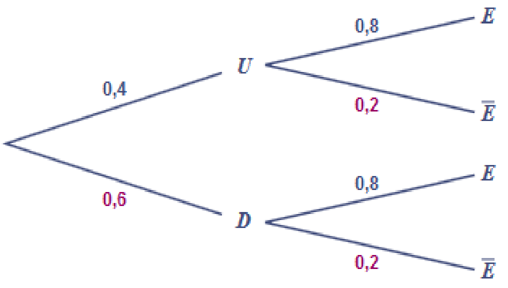
Indépendamment de la formule choisie, 80% des inscrits choisissent l'excursion facultative.

On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage.

On considère les événements :

U : « l'employé inscrit choisit la formule 1 »
D : « l'employé inscrit choisit la formule 2 »
E : « l'employé inscrit choisit l'excursion facultative »

1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation



2) Montrer que la probabilité que l'employé inscrit choisisse la formule 2 et l'excursion facultative est égale à 0,48.

$p(D \cap E) = p(D) \times p_D(E)$ Soit $p(D \cap E) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$

La probabilité que l'employé inscrit choisisse la formule n° 2 et l'excursion facultative est égale à 0,48.

3) Soit C le coût total du voyage (excursion comprise).

a) Déterminer les différentes valeurs possibles que peut prendre C.

- l'employé inscrit choisit la formule n° 1 et l'excursion facultative est égale alors $C = 150 + 30 = 180$
- l'employé inscrit choisit uniquement la formule n° 1 alors $C = 150$
- l'employé inscrit choisit la formule n° 2 et l'excursion facultative est égale alors $C = 100 + 30 = 130$
- l'employé inscrit choisit uniquement la formule n° 1 alors $C = 100$

L'ensemble des différentes valeurs que peut prendre C est $\{100; 130; 150; 180\}$

b) Déterminer la loi de probabilité de C.

$p(U \cap E) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$

$p(U \cap \overline{E}) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$

$p(D \cap \overline{E}) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$

D'où la loi de probabilité du coût C.

Coût total en euros C_i	100	130	150	180
Probabilité p_i	0,12	0,48	0,08	0,32

c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter le résultat

L'espérance mathématique de cette loi est :

$$100 \times 0{,}12 + 130 \times 0{,}48 + 150 \times 0{,}08 + 180 \times 0{,}32 = 144$$

Le coût de moyen du voyage (excursion comprise) est de 144 euros par participant.

Exercice 2 :
Une entreprise fabrique des sacs de luxe en cuir. Chaque jour, elle produit un nombre x de sacs tel que $0 \leq x \leq 70$.
Le coût, exprimé en euros, de la production journalière de x sacs est donné par la fonction f définie sur I = [0 ; 70] par $f(x) = x^3 - 90x^2 + 2\,700x$

Partie A : Etude de la fonction *f*

1) Etudier le sens de variation de la fonction f sur I

$f'(x) = 3x^2 - 180x + 2700$; $f'(x) = 3(x-30)^2$. Ainsi pour tout $x \in [0 ; 70]$, $f'(x) \geq 0$
Sur [0 ; 70] , la fonction f est croissante.

2) Déterminer une équation de la tangente à C_f , la courbe représentative de f, au point d'abscisse 30.
T : $y = f'(30)(x-30) + f(30)$; T : $y = 27\,000$

3) Montrer que C_f admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.
$f''(x) = 6x - 180$;

x	0		30		70
Signe de $f''(x)$		-	0	+	

En 30, f'' s'annule en changeant de signe.
Ainsi C_f admet un point d'inflexion de coordonnées (30 ; 27000)

Partie B : Etude du bénéfice en fonction de la production

On suppose que toute la production est vendue au prix de 900 euros l'unité.
On note $g(x)$ la recette journalière. Ainsi $g(x) = 900x$
Le bénéfice journalier s'exprime par $h(x) = g(x) - f(x)$

1) Déterminer $h'(x)$, étudier son signe et établir le tableau de variations de h sur I

$h(x) = 900x - (x^3 - 90x^2 + 2\,700x)$; $h(x) = -x^3 + 90x^2 - 1800x$

$h'(x) = -3x^2 + 180x - 1800$ $\Delta = 10800$ $x_1 = \dfrac{-180+60\sqrt{3}}{-6} = 30 - 10\sqrt{3}$; $x_1 \approx 12{,}68$

$x_2 = \dfrac{-180-60\sqrt{3}}{-6} = 30 + 10\sqrt{3}$; $x_2 \approx 47{,}32$

x	0		$x_1 \approx 12{,}68$		$x_2 \approx 47{,}32$		70
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$h(x)$	0	↘	≈ -10392	↗	≈ 10392	↘	-28000

2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs exactes de ces solutions.

- Sur $[0 ; x_1]$, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution 0.
- Sur $[x_1 ; x_2]$, la fonction h est continue et strictement croissante et $0 \in [h(x_1) ; h(x_2)]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires , l'équation $h(x) = 0$ admet une solution.
- Sur $[x_2 ; 70]$, la fonction h est continue et strictement décroissante et $0 \in [-28000 ; h(x_2)]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires , l'équation $h(x) = 0$ admet une solution.

Il y a donc 3 solutions à cette équation sur [0 ; 70].
D'après la calculatrice, ces solutions sont : 0 ; 30 et 60.

3) Déterminer le signe de $h(x)$ sur I.

x	0		30		60		70
Signe de $h(x)$	0	-	0	+	0	-	

4) A quel intervalle doit appartenir x pour que l'entreprise réalise des bénéfices ?
$x \in]30 ; 60[$. Pour que l'entreprise réalise des bénéfices, il faut produire entre 30 et 60 sacs.

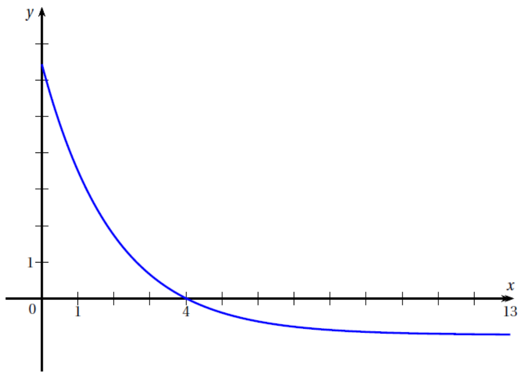
<u>Exercice 3</u> :
Pour chacune des situations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse. **Justifier la réponse.**

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction *f* définie sur l'intervalle [-5 ; 10]

x	-5		-2		4		8		10
$f(x)$	12	↘	-10	↗	5	↘	0	↘	-1

Proposition 1 : L'équation *f*(*x*) = 8 n'admet aucune solution sur l'intervalle [-5 ; 10]
FAUX . Sur [-5 ; -2] , la fonction *f* est continue , strictement décroissante et 8 ∊[-10 ; 12]. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation *f*(*x*) = 8 admet une solution sur [-5 ; -2].

2. On considère une fonction *g* définie et dérivable sur [0 ; 13] et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction *g'* , fonction dérivée de la fonction *g* sur l'intervalle [0 ; 13]



Proposition 2 : La fonction *g* est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 4]
FAUX. La courbe donnée nous permet de lire le signe de *g*'. Ainsi :

x	0		4		13
Signe de $g'(x)$		+	0	-	

Ainsi la fonction *g* est strictement croissante sur [0 ; 4]

Proposition 3 : La fonction *g* est concave sur l'intervalle [0 ; 13].
VRAI : *g*' est décroissante sur [0 ; 13] donc *g* est concave sur [0 ; 13]

Exercice 4 :

Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 m^3 d'eau au 1er juillet 2013 au matin.

La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4% du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 m^3 pour l'irrigation des cultures aux alentours.

Cette situation peut être modélisée par une suite (u_n).

Le 1er juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $u_0 = 100\,000$.

Pour tout entier naturel n supérieur à 0, u_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.

1) a) Justifier que le volume d'eau u_1 au matin du 2 juillet 2013 est égal à 95 500 m^3.

$u_1 = 100\,000 \times 0{,}96 - 500$; $u_1 = 96\,000 - 500$; $u_1 = 95\,500$

b) Déterminer le volume d'eau u_2, au matin du 3 juillet 2013.

$u_2 = 95\,500 \times 0{,}96 - 500$; $u_2 = 91\,680 - 500$; $u_2 = 91\,180$

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0{,}96\, u_n - 500$.

L'évaporation de 4% revient à multiplier par 0,96, puis libérer 500 m^3 revient à soustraire 500.

Ainsi : $u_{n+1} = 0{,}96\, u_n - 500$.

2) Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-contre. Recopier et compléter les lignes 6, 7 et 9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	u est un nombre réel
L2		n est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à u la valeur 100 000
L4		Affecter à n la valeur 0
L5		Tant que $u > 0$
L6		Affecter à n la valeur …
L7		Affecter à u la valeur …
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher …

Ligne 6 Affecter à n la valeur $n + 1$

Ligne 7 Affecter à u la valeur $0{,}96u - 500$

Ligne 9 Afficher n