CORRIGE BAC BLANC N°2

Exercice 1 :

Pour chacune des cinq propositions ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse **en justifiant la réponse.**

1- Pour une puissance électrique donnée, le tarif règlementé du kilowattheure est passé de 0,1140€ au 01/07/2007 à 0,1372€ au 01/07/2014.
Proposition : Cette augmentation correspond à un taux d'évolution moyen annuel, arrondi au centième, de 1,72%.

Augmenter de 1,72%, c'est multiplié par 1,0172 par an. De plus, entre 2007 et 2014, il y a 7 ans.
D'où : $0,1140 \times 1,0172^7 \approx 0,1285$ et non 0,1372. **FAUX**

2- La courbe représentative d'une fonction *g* définie et continue sur l'intervalle [0 ; 2] est donnée en fig.1.
La courbe représentative d'une de ses primitives, G, est donnée sur la fig.2.
La courbe représentative de G passe par les points A(0 ;1), B(1 ;1) et C(2 ;5).

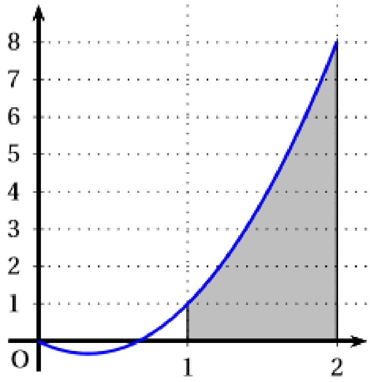


fig. 1

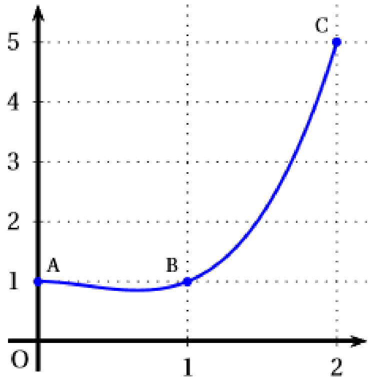


fig. 2

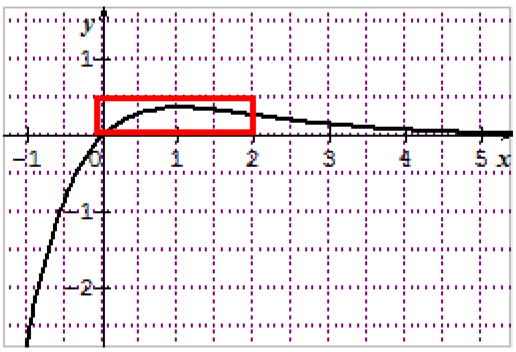
Proposition : La valeur exacte de l'aire de la partie grisée sous la courbe représentative de *g* en fig.1 est 4 unités d'aire.
A = G(2) – G(1) ; A = 5 – 1 ; A = 4. **VRAI**

3- Soit f la fonction définie sur [1 ; 26] par : $f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$.
On admet que la fonction G définie par : $G(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2$ est une primitive sur [1 ; 26] de la fonction g définie par : $g(t) = 24t\ln(t)$

Proposition : Sur [1 ; 26], une primitive F de la fonction f est définie par $F(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2 - t^3 + 10t$

On a $f(t) = g(t) - 3t^2 + 10$. Ainsi $F(t) = G(t) - t^3 + 10t$; $F(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2 - t^3 + 10t$. **VRAI**

Pour les questions 4 et 5, on travaillera avec le graphique ci- contre :



4- On pose $I = \int_0^2 f(x)dx$
Proposition : I > 3.
Le rectangle rouge a une aire de 1 u.a, d'où I < 1. **FAUX**

5- Soit F une primitive de f.
Proposition : Sur [-1 ; 0], la fonction F est strictement décroissante.
Le sens de variation de F sur [-1 ; 0] correspond au signe de f sur [-1 ; 0].
Or f est négative sur [-1 ; 0] d'où F est strictement décroissante sur [-1 ; 0]. **VRAI**

Exercice 2 :

Dans cet exercice les résultats seront, si nécessaire, arrondis au dix millième près.

Un fabriquant de lentilles hydrophiles (lentilles de contact pour les yeux) a constaté à l'issue de la fabrication, que ces lentilles peuvent présenter deux types de défauts : un rayon de courbure défectueux ou une perméabilité à l'oxygène défectueuse.

On admet que dans cette production, 12% des lentilles présentent au moins un des deux défauts.

L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de qualité de ces lentilles basé sur le rayon de courbure avant leur mise en vente.

Ce contrôle détecte et élimine 80% des lentilles défectueuses, mais il élimine également à tort 2% des lentilles non défectueuses. Les lentilles non éliminées sont alors mise en vente.

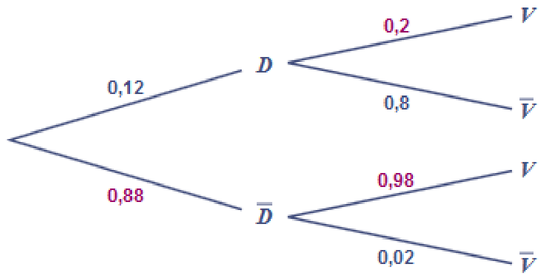
On prélève une lentille au hasard dans cette production et on note :

- D l'évènement « la lentille est défectueuse »
- V l'évènement « la lentille est mise en vente »

1) Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :

- 12 % des lentilles présentent au moins un des deux défauts d'où $P(D) = 0{,}12$ et $P(\overline{D}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$
- Le contrôle détecte et élimine 80 % des lentilles défectueuses d'où $P_D(\overline{V}) = 0{,}8$ et $P_D(V) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
- Le contrôle détecte et élimine à tort 2 % des lentilles non défectueuses d'où $P_{\overline{D}}(\overline{V}) = 0{,}02$ et $P_{\overline{D}}(V) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

D'où l'arbre pondéré rendant compte de cette situation :



2) Calculer la probabilité que la lentille soit défectueuse et mise en vente.

$$P(V \cap D) = P_D(V) \times P(D)$$

Soit $P(V \cap D) = 0{,}12 \times 0{,}2 = 0{,}024$

La probabilité qu'une lentille soit défectueuse et mise en vente est égale à 0,024.

3) Montrer que la probabilité qu'une lentille soit mise en vente est égale à 0,8864.

D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(V) = P(V \cap D) + P(V \cap \overline{D})$$

$$P(V \cap \overline{D}) = P_{\overline{D}}(V) \times P(\overline{D})$$

Soit $P(V \cap \overline{D}) = 0{,}98 \times 0{,}88 = 0{,}8624$

Or
$$\begin{aligned} P(V) &= P(V \cap D) + P(V \cap \overline{D}) \\ &= 0{,}024 + 0{,}8624 \\ &= 0{,}8864 \end{aligned}$$

La probabilité qu'une lentille soit mise en vente est égale à 0,8864.

4) Quelle est la probabilité qu'une lentille mise en vente soit défectueuse ?

Il s'agit, de calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement D sachant que l'évènement V est réalisé.

$$P_V(D) = \frac{P(V \cap D)}{P(V)} \qquad \text{Soit} \quad P_V(D) = \frac{0{,}024}{0{,}8864} \approx 0{,}0271$$

Arrondie au dix millième près, la probabilité qu'une lentille mise en vente soit défectueuse est 0,0271.

5) Dans le stock de lentilles commercialisées par l'entreprise, on admet que 3% des lentilles sont défectueuses. Les lentilles sont vendues par lot de 100 pièces. Le stock est suffisamment important pour assimiler un lot à un tirage aléatoire avec remise.
Pour un lot de 100 lentilles, on note X la variable aléatoire égale au nombre de lentilles défectueuses.

a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}03$.

b) Ci-dessous est donné un extrait du tableau donnant les valeurs des probabilités $P(X \leq k)$, où k désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle [0 ; 100].

k	$P(X \leqslant k)$	k	$P(X \leqslant k)$	k	$P(X \leqslant k)$
0	0,047 553	4	0,817 855	8	0,996 784
1	0,194 622	5	0,919 163	9	0,999 126
2	0,419 775	6	0,968 772	10	0,999 785
3	0,647 249	7	0,989 376	11	0,999 952

A l'aide de ce tableau ou de la calculatrice, déterminer $P(1 \leq X \leq 7)$, la probabilité que le nombre de lentilles défectueuses dans un lot de 100 soit compris entre 1 et 7.

$$P(1 \leqslant X \leqslant 7) = P(X \leqslant 7) - P(X < 1)$$

Soit $$P(1 \leqslant X \leqslant 7) = P(X \leqslant 7) - P(X = 0) = 0{,}989376 - 0{,}047553 = 0{,}941823$$

Arrondie au dix millième près, la probabilité que le nombre de lentilles défectueuses dans un lot de 100 soit compris entre 1 et 7 est 0,9418.

Exercice 3 :

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10% de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1) a) On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

```
Variables :    k, NbClients
Traitement :   Affecter à k la valeur 0
               Affecter à NbClients la valeur 1 000 000
               Tant que k < 8
                  | affecter à k la valeur k + 1
                  | affecter à NbClients la valeur 0,9 × NbClients + 60000
                  | Afficher NbClients
               Fin Tant que
```

Cet algorithme donne le nombre de clients de cet opérateur pour les huit prochaines années.

b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec toutes les valeurs affichées pour k de 0 jusqu'à 5.

k	0	1	2	3	4	5
Nb de clients	1 000 000	960 000	924 000	891 600	862 440	836 196

2) En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n, par : $U_0 = 1000$ et $U_{n+1} = 0,9\, U_n + 60$.
Le terme U_n donne une estimation du nombre de clients, en milliers, pour l'année 2010 + n.
Pour étudier la suite (U_n), on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 600$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,9.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 600 \\ &= 0{,}9U_n + 60 - 600 \\ &= 0{,}9U_n - 540 \\ &= 0{,}9 \times (U_n - 600) \\ &= 0{,}9V_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0{,}9V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

b) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n.

$V_0 = U_0 - 600$. Soit $V_0 = 1000 - 600 = 400$.

(V_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $V_0 = 400$ donc :

Pour tout entier n, $V_n = 400 \times 0{,}9^n$.

c) Montrer que pour tout entier n, on a $U_n = 400 \times 0{,}9^n + 600$.

Pour tout entier n,

$$V_n = U_n - 600 \quad \Leftrightarrow \quad U_n = V_n + 600$$

Ainsi, pour tout entier n, $U_n = 400 \times 0{,}9^n + 600$.

d) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Interpréter ce résultat dans le contexte de ce problème.

Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \left(400 \times 0{,}9^{n+1} + 600\right) - \left(400 \times 0{,}9^n + 600\right) \\ &= 400 \times 0{,}9^{n+1} - 400 \times 0{,}9^n \\ &= 400 \times 0{,}9^n \times (0{,}9 - 1) \\ &= -40 \times 0{,}9^n \end{aligned}$$

Comme pour tout entier n on a $0{,}9^n > 0$, on en déduit que pour tout entier n, $U_{n+1} - U_n < 0$ donc la suite (U_n) est strictement décroissante.

D'autre part, $0 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ d'où, $\lim\limits_{n \to +\infty} 400 \times 0{,}9^n + 600 = 600$. Soit $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 600$.

La suite (U_n) est décroissante et converge vers 600. D'année en année, le nombre de clients de cet opérateur va décroitre et se stabiliser à environ 600 000 clients.

3) A la suite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie observe une modification du comportement de ses clients.
Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8% de ses clients et regagne 100 000 nouveaux clients.
On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à 860 000.
En supposant que cette nouvelle évolution se poursuive durant quelques années, déterminer le nombre d'années nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients.

La situation peut être modélisée par la suite (W_n) définie par $W_0 = 860$ et, pour tout entier naturel n, $W_{n+1} = 0{,}92W_n + 100$ où le terme W_n donne une estimation du nombre de milliers de clients pour l'année $2014 + n$.

Les termes successifs de la suite (W_n) arrondis au dixième près sont donnés dans le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
W_n	860	891,2	919,9	946,3	970,6	993	1013,5

L'opérateur retrouve au moins un million de clients au bout de 6 ans.

Exercice 4 : On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = 2x - x\ln(x) + 1$.

1) La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1\,;3)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B(0\,;2)$. Déterminer $f'(1)$.

Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point A :

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{Soit} \quad f'(1) = \frac{2-3}{0-1} = 1$$

Ainsi, $f'(1) = 1$.

2) a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 - \ln(x)$.

$g = uv$ d'où $g' = u'v + uv'$ avec pour tout réel x strictement positif, $\begin{cases} u(x) = x & ; \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) & ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Pour tout réel x strictement positif :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) \\ &= 2 - \ln(x) - 1 \\ &= 1 - \ln(x) \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie pour tout réel x strictement positif, par $f'(x) = 1 - \ln(x)$.

b) Résoudre dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$, l'inéquation $1 - \ln(x) \leq 0$.

Pour tout réel x strictement positif :

$$\begin{aligned} 1 - \ln(x) \leqslant 0 &\Leftrightarrow -\ln(x) \leqslant -1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e} \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation $1 - \ln(x) \leqslant 0$ est l'intervalle $S = [\mathrm{e}; +\infty[$.

c) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$

Les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ se déduisent du signe de sa dérivée. D'où le tableau des variations de la fonction f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$\mathrm{e}+1$	↘	

CALCUL DU MAXIMUM

$$f(\mathrm{e}) = 2\,\mathrm{e} - \mathrm{e} \times \ln(\mathrm{e}) + 1 = \mathrm{e} + 1$$

3) Etudier la convexité de la fonction f.

La convexité de la fonction f se déduit du signe de sa dérivée seconde f''. Or pour tout réel x strictement positif, $f''(x) = -\dfrac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est conconcave sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4) Quelle est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3{,}8$? Justifier.

Sur $]0\,;+\infty[$, le maximum de f est $e+1$. Or $e+1 < 3{,}8$. D'où **l'équation $f(x) = 3{,}8$ n'a pas de solution.**

5) Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 1$ sur $]0\,;+\infty[$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2x - x\ln(x) + 1 = 1 \Leftrightarrow x(2 - \ln(x)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (impossible) ou $2 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$,

D'où **S = { e^2}**