CORRIGE TEST 10 TES-TL

Exercice 1 :

I - Répondre par VRAI ou FAUX , en justifiant :

1) L'amplitude d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% augmente lorsque la taille de l'échantillon diminue.

   L'amplitude d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est égale à 2 x $1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

   Lorsque n diminue, $\sqrt{n}$ diminue, et donc (2 x $1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$) augmente. **VRAI**

2) Lorsque l'on sait que la proportion p d'un caractère dans une population est 0,8. Si l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est [0,75 ; 0,85] alors la taille de l'échantillon était de 100.

   $0{,}8 - 1{,}96\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{100}} \approx 0{,}72$ et $0{,}8 + 1{,}96\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{100}} \approx 0{,}88$. Donc **FAUX**

3) En France, la proportion des daltoniens parmi les hommes est 8%. On considère 2 échantillons aléatoires de 150 hommes. On y observe respectivement les fréquences f_A = 0,12 et f_B = 0,13 de daltoniens. Les échantillons considérés ne sont pas représentatifs de la population avec un risque d'erreur de 5%.

   I = [0,036 ; 0,124] . Ainsi $f_A \in$ I et $f_B \notin$ I donc seul l'échantillon B n'est pas représentatif de la population avec un risque d'erreur de 5%. **FAUX**

4) Un sondage mené auprès de 150 villageois montre que 80 d'entre eux sont favorables à une augmentation des impôts locaux. On affirme, au niveau de confiance de 95% que plus de la moitié de la population du village y est favorable.

   Après avoir vérifié ses conditions d'utilisation, on calcule l'intervalle de confiance : [0,451 ; 0,615] donc on ne peut pas affirmer, au niveau de confiance de 95% , que plus de la moitié de la population du village y est favorable car 0,5 ∈ [0,451 ; 0,615]. **FAUX**.

II – QCM avec une ou plusieurs réponses :

Dans une grande ville, 11% des habitants sont atteints de lycanthropie (*). Afin d'étudier ce phénomène, des scientifiques parviennent à isoler, durant la journée avant la pleine lune, 321 habitants de la ville et à les retenir.

1) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence des lycanthropes dans les échantillons de taille 321 est :

   a)[0,093 ; 0,127] b) [0,054 ; 0,166] **c) [0,076 ; 0,144]**

2) L'échantillon considéré de la population doit contenir :

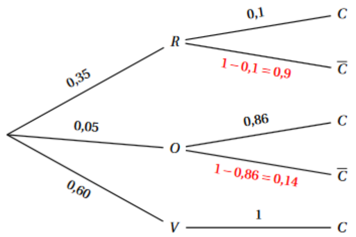
   a) 35 lycanthropes b) Entre 30 et 40 lycanthropes **c) Entre 30 et 40 lycanthropes avec une probabilité de 0,95.**

Exercice 2 :

Une étude est menée par une association de lutte contre la violence routière. Des observateurs, sur un boulevard d'une grande ville, se sont intéressés au comportement des conducteurs d'automobile au moment de franchir un feu tricolore.

Partie A :

1) Modéliser cette situation par un arbre pondéré.



2) Montrer que la probabilité que le conducteur continue de rouler au feu est 0,678.

   R, O et V forme une partition de l'univers.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $$p(C) = p(R\cap C) + p(O\cap C) + p(V\cap C) = p(R)\times p_R(C) + p(O)\times p_O(C) + p(V)\times p_V(C)$$
   $$= 0{,}35\times 0{,}1 + 0{,}05\times 0{,}86 + 0{,}6\times 1 = 0{,}678$$

3) Sachant qu'un conducteur continue de rouler au feu, quelle est la probabilité que le feu soit vert ?

   Sachant qu'un conducteur continue de rouler au feu, la probabilité que le feu soit vert est $p_C(V)$:

   $$p_C(V) = \frac{p(V\cap C)}{p(C)} = \frac{0{,}6\times 1}{0{,}678} \approx 0{,}885$$

Partie B :

Dans cette partie, on s'intéresse au trafic aux heures de pointe.

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de voitures par heure à proximité du feu évoqué dans la partie A. On admet que X suit la loi normale de moyenne 3 000 et d'écart type 150.

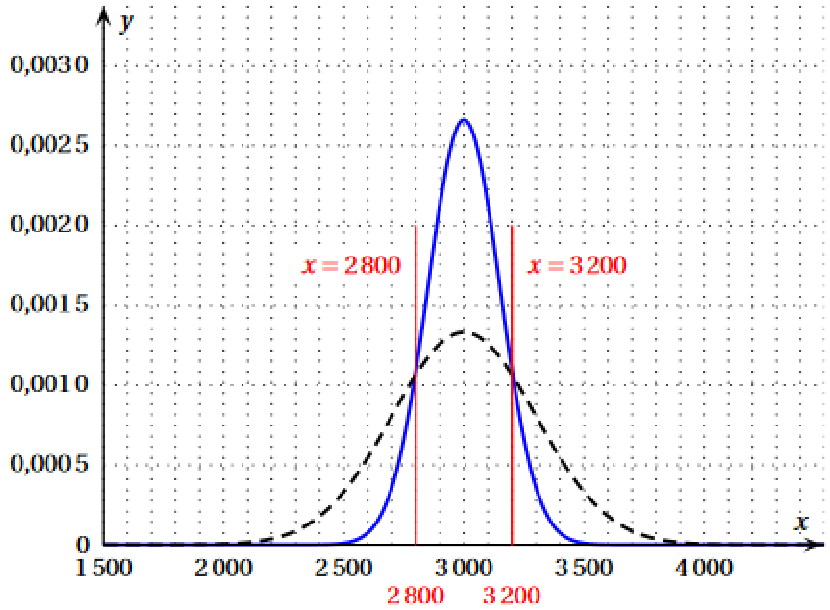
1) A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité de compter entre 2 800 et 3 200 voitures par heure à cet endroit.

À l'aide de la calculatrice, on détermine la probabilité de compter entre 2 800 et 3 200 voitures par heure à cet endroit, c'est-à-dire $p(2800 \leqslant X \leqslant 3200)$; on trouve approximativement 0,818.

2) A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité de compter plus de 3 100 voitures par heure à cet endroit.

À l'aide de la calculatrice, on détermine la probabilité de compter plus de 3 100 voitures par heure à cet endroit, c'est-à-dire $p(X \geqslant 3100)$; on trouve approximativement 0,252.

3)



On trace les droites d'équations $x = 2800$ et $x = 3200$; elles semblent couper les deux courbes en leurs points d'intersection.

D'après le cours :

- $p(2800 \leqslant X \leqslant 3200$ est l'aire $\mathscr{A}_1$ de l'ensemble des points compris entre la courbe en traits pleins, l'axe des abscisses et les deux droites verticales tracées ;
- $p(2800 \leqslant Y \leqslant 3200$ est l'aire $\mathscr{A}_2$ de l'ensemble des points compris entre la courbe en pointillés, l'axe des abscisses et les deux droites verticales tracées.

Graphiquement, $\mathscr{A}_1 > \mathscr{A}_2$, donc la probabilité qu'il passe en une heure, entre 2 800 et 3 200 voitures, est plus grande pour le lieu correspondant à l'aire $\mathscr{A}_1$, donc à proximité du feu.

Exercice 3 :

Une entreprise fabrique des ballons de football de deux tailles différentes : une petite taille et une taille standard.

Partie A : Conformité de la réglementation.

1) a) À la calculatrice, on trouve au millième près

$$P(410 \leqslant X \leqslant 450) \approx 0,954$$

b) A la calculatrice $P(X > 420) = 0,5 + P(420 < X < 430) = 0,841$

2) a) Donner ***P*(68 ≤Y≤70) = 0,97**

b) On pose $Z = \dfrac{Y-69}{\sigma_2}$. **Z suit la loi normale centrée réduite** car X suit la loi normale $\mu = 69$ et d'écart type σ_2

c) Montrer que $P(68 \leq Y \leq 70) = P(-\dfrac{1}{\sigma_2} \leq Z \leq \dfrac{1}{\sigma_2})$

$$P(68 \leq Y \leq 70) = P(-1 \leq Y - 69 \leq 1)$$
$$P(68 \leq Y \leq 70) = P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq \frac{Y-69}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}\right)$$
$$P(68 \leq Y \leq 70) = P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}\right)$$

d) On donne le résultat suivant : $P(-2{,}17 \leq Z \leq 2{,}17) \approx 0{,}97$. Déterminer la valeur de σ_2. Arrondir au centième.

On sait que $P(68 \leq Y \leq 70) = 0{,}97$ d'où $P(-\dfrac{1}{\sigma_2} \leq Z \dfrac{1}{\sigma_2}) = 0{,}97$.

$$\left.\begin{array}{ll} P(-2{,}17 \leq Z \leq 2{,}17) & = 0{,}97 \\ P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) & = 0{,}97 \end{array}\right\} \underset{\text{par identification}}{\Longrightarrow} \frac{1}{\sigma} = 2{,}17 \text{ et } \boxed{\sigma \approx 0{,}46}$$

Partie B : Etude d'une publicité de l'entreprise.

L'entreprise affirme que 98% de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation.
Un contrôle est réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 223 d'entre eux sont conformes à la réglementation.

1) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de ballons de taille standard conforme à la réglementation.

On a $n = 250$, $p = 0{,}98$ vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\left\{\begin{array}{l} \checkmark \quad n = 250 \geq 30 \\ \checkmark \quad np = 250 \times 0{,}98 = 245 \geq 5 \\ \checkmark \quad n(1-p) = 250 \times 0{,}02 = 5 \geq 5 \end{array}\right.$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}98 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}98 \times 0{,}02}}{\sqrt{250}} \; ; \; 0{,}98 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}98 \times 0{,}02}}{\sqrt{250}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}9626$. On arrondit la borne inférieure par défaut au millième soit $\mathbf{0{,}962}$.
- $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}99735$. On arrondit la borne supérieure par excès au millième soit $\mathbf{0{,}998}$.

$$\boxed{I \approx [0{,}962\,;\ 0{,}998]}$$

2) Le résultat du contrôle remet-il en cause l'affirmation de l'entreprise ? Justifier.

La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle I ($0{,}892 \notin I$) donc **au risque d'erreur de 5%, le résultat du contrôle remet en question l'affirmation de l'entreprise.**